EP 127 - 2009 : Suites et fonctions

Auteur du corrigé : Alain SOLEAN **TI-Nspire™ – TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version* 1.7

Fichier associé : EP127_2009_SuitesFonctions.tns

1. Le sujet

Sujet 127 de l'épreuve pratique 2009 – Suites et fonctions

Enoncé

Soit n un entier naturel, $n \geq 1$. On considère les fonctions f_n définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}}{n} - 1 + x\mathrm{e}^{1-x}.$$

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, conjecturer, suivant les valeurs de n :
a) les variations de f_n.
b) le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 0$.

2. On note α_n et β_n les deux solutions, lorsqu'elles existent, de l'équation $f_n(x) = 0$ telles que $\alpha_n < \beta_n$
a) Conjecturer, pour tout $x > 0$, une inégalité entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.
b) Quelle conjecture peut-on alors formuler à propos du sens de variation des suites (α_n) et (β_n) et de leur convergence éventuelle ?
c) Quelle propriété semblent vérifier les suites (α_n) et (β_n) ?

Partie B

3.
a) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet, à partir d'une certaine valeur de n, deux solutions distinctes α_n et β_n dans des intervalles que l'on précisera
b) Démontrer que les suites (α_n) et (β_n) sont de monotonies contraires.
c) Que peut-on en déduire ?

Production demandée

- Les différentes conjectures.
- Les démonstrations détaillées des questions **3. a** et **3. b**.

Compétences évaluées

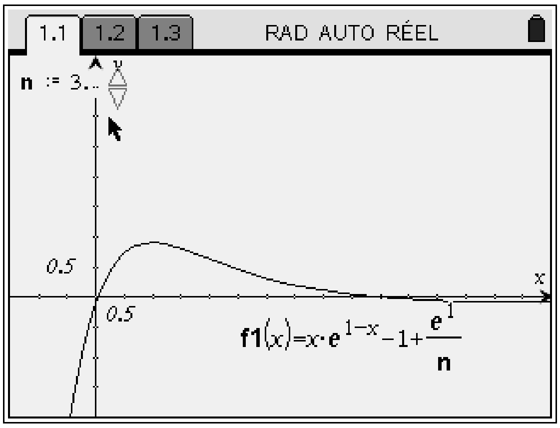
- Savoir utiliser un logiciel de géométrie permettant de tracer des courbes de fonctions.
- Émettre des conjectures.
- Savoir utiliser le théorème de la bijection.
- Savoir utiliser les théorèmes sur les suites monotones bornées.

2. Corrigé

Partie A

1) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.
Définir un curseur :
menu 1 (**Actions**) A (**Contrôle curseur**).
Nommer la variable ***n***, puis définir avec ctrl menu les **Réglages** :
Minimum : 1, **Maximum :** 10, **Incrément :** 1,
Style : Affichage réduit.

Définir la fonction f_1 : $f_1(x) = \frac{\mathrm{e}}{n} - 1 + xe^{1-x}$.



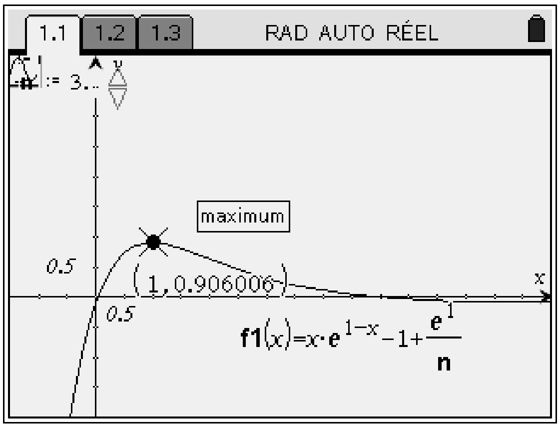
Régler la fenêtre :
menu 4 (**Fenêtre**) 1 (**Réglages de la fenêtre**).

Choisir **XMin** = – 1,5 ; **XMax** = 8 ; **YMin** = –2 ;
YMax = 4.

Cacher la ligne de saisie : ctrl G.

En animant le curseur on fait varier la représentation graphique.

a) En utilisant menu 5 (**Trace**) 1 (**Trace**), on peut conjecturer que : pour tout $n \geq 1$, les fonctions f_n sont croissantes sur l'intervalle [0 ; 1] et décroissantes sur [1 ; + ∞[.

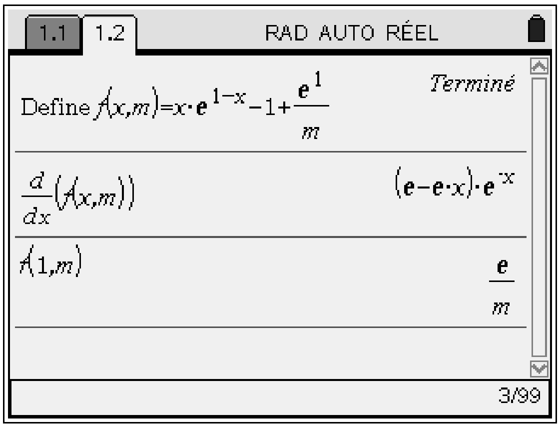


b) En faisant varier la valeur de n avec le curseur, on peut conjecturer que, pour $n < 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ n'admet aucune solution strictement positive et que, pour $n \geq 3$, elle possède deux solutions.

2) En faisant varier la valeur de n avec le curseur, on peut conjecturer que :
a) pour tout $x \geq 0$ $f_{n+1}(x) < f_n(x)$;
b) la suite (α_n) est croissante et semble converger vers 1 et la suite (β_n) est décroissante et semble converger vers 1 ;
c) les deux suites semblent posséder les propriétés de suites adjacentes.

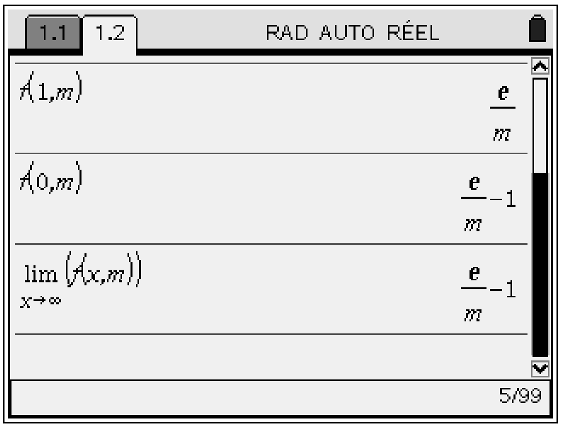
Partie B

3) a) Ouvrir une nouvelle page **Calculs** et définir la fonction f par $f(x,m) = \frac{\mathrm{e}}{m} - 1 + xe^{1-x}$ (on doit changer le nom du paramètre car la variable n est utilisée et affectée dans l'application précédente) :
menu 1 (**Actions**) 1 (**Définir**).
Calculer la dérivée de cette fonction avec pour variable x : menu 4 (**Analyse**) 1 (**Dérivée**).
On peut conclure que cette dérivée est négative pour $x < 1$ et positive pour $x > 1$ donc f_n admet pour tout n un maximum pour $x = 1$ qui vaut $\frac{\mathrm{e}}{n}$.



De plus on a $f_n(0) = \dfrac{\mathrm{e}}{n} - 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{n} - 1$.

Comme, pour tout n, on a $\dfrac{\mathrm{e}}{n} > 0$ et que, pour $n \geq 3$, on a $\dfrac{\mathrm{e}}{n} - 1 < 0$, on peut conclure que, pour tout $n \geq 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions, l'une dans l'intervalle [0 ; 1] (α_n) et l'autre dans l'intervalle [1 ; +∞[(β_n).



b) Tout ce qui suit n'est valable que pour $n \geq 3$.

On a vu que, pour tout $x \geq 0$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ (propriété immédiate à démontrer).
Donc on a, sur l'intervalle [0 ; 1], f_n croissante et $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$.
$f_{n+1}(\alpha_n) < f_n(\alpha_n)$ donc $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ donc $\alpha_n < \alpha_{n+1}$. De ce fait, la suite (α_n) est croissante.
De même, sur l'intervalle[1 ;+∞[, f_n est décroissante, $f_{n+1}(\beta_{n+1}) = 0$, $f_{n+1}(\beta_n) < f_n(\beta_n)$ donc $f_{n+1}(\beta_n) < 0$ d'où $\beta_n > \beta_{n+1}$. De ce fait, la suite (β_n) est décroissante.

c) En conclusion, la suite (α_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge, et la suite (β_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle converge aussi.
Si n tend vers + ∞ , alors l'équation $f_n(x) = 0$ tend vers l'équation $-1 + x\mathrm{e}^{1-x} = 0$ qui possède une unique solution $x = 1$, donc les deux suites semblent avoir la même limite 1.