M2n - LANCER PARABOLIQUE

Auteur : Jean-Louis Balas

TI-Nspire™ CAS

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version* 1.6

Mots-clés : mouvement, trajectoire, énergie, portée, flèche, tir, amortissement visqueux.

Fichiers associés : M2nEleve_LancerParabol_CAS.tns, M2nProf_LancerParabol_CAS.tns

1. Objectifs

Déterminer à partir des équations paramétriques d'un mouvement parabolique, son équation dans le plan xOz
Utiliser l'outil de calcul formel de TI-Nspire CAS, pour trouver la flèche et la portée horizontale
Calculer l'énergie potentielle et cinétique du mobile en un point donné de la trajectoire.

Familiariser l'élève aux possibilités offertes par la calculatrice.

2. Commentaires

On lance une boule de pétanque de masse 250 g à une hauteur h_0 par rapport à une origine O et à une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle α par rapport à l'horizontale, avec $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Le tir a lieu dans un repère galiléen dans le plan xOz et dans le sens des x positifs. On rappelle les équations paramétriques du mouvement. La seule force à laquelle soit soumis le corps est la gravité $\boldsymbol{g}$.

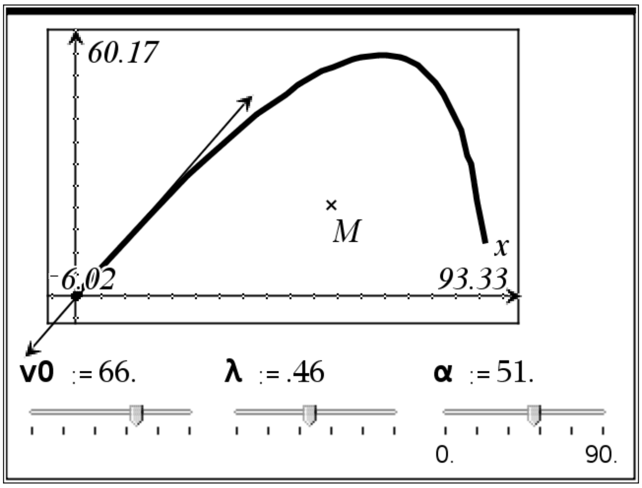
3. Conduite de l'activité

Pour obtenir à l'écran la même présentation que sur la calculatrice de l'élève (voir ci-contre), cliquer sur Affichage/Vue Unité TI-Nspire CAS.

L'élève observe une simulation du phénomène de façon à bien assimiler l'influence de h_0, v_0 et α sur la forme de la trajectoire du mouvement.

Unités utilisées :

- La distance en mètres (m)
- L'énergie en Joules (J)
- La masse en Kg



On propose alors à l'élève d'utiliser la calculatrice pour :

- Déterminer l'équation cartésienne $y = f(x)$ du mouvement et la représenter graphiquement ;
- Utiliser les fonctions de calcul formel de l'unité nomade pour déterminer l'expression de la vitesse de la boule de pétanque, les expressions maximales de la flèche et de la portée horizontale pour une inclinaison et une vitesse initiale données.

4. Compléments

On pourra représenter en fonction du temps l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie totale.

5. Annexe

On lance une masse m avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle α avec l'horizontale. Le mouvement peut être décrit en tenant compte ou non les forces de frottement dû à l'air.

a) Sans frottements

Si on projette l'équation fondamentale de la dynamique sur la verticale et l'horizontale, on a :

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=0 \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-mg \end{cases}$$

La double intégration de ces équations conduit, compte tenu des conditions initiales à :

$$\begin{cases} x=v0\cos\alpha\, t \\ y=-\dfrac{1}{2}gt^2+v0\sin\alpha\, t \end{cases}$$

La trajectoire du mobile est une parabole.

b) Avec frottements

Un projectile ponctuel de masse m est propulsé depuis un point O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ sous un angle de tir α

Le tir se déroule dans un milieu fluide visqueux exerçant sur le mobile une force de frottement $\vec{f}=-mK\vec{v}$ où m est la masse du mobile, $\vec{v}$ la vitesse et K une constante liée à la résistance du milieu.

Nous convenons que le vecteur vitesse initiale se trouve dans le plan xOy.

Cette hypothèse est valable pour des vitesses inférieures à 60 km/h. Pour des vitesses supérieures, il est préférable de considérer que le frottement est fonction du carré de la vitesse.

Les équations horaires sont obtenues en utilisant la relation fondamentale de la dynamique de Newton $m\vec{g}-mK\vec{v}=m\vec{\gamma}$ où $\vec{\gamma}$ représente l'accélération du mobile. Les composantes cartésiennes de l'accélération sont : $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=-K\dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-K\dfrac{dy}{dt}-g \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}=-K\dfrac{dz}{dt} \end{cases}$ On pose comme notations $\begin{matrix} \mathring{f}=\dfrac{df}{dt} \\ \mathring{\mathring{f}}=\dfrac{d^2f}{dt^2} \end{matrix}$ f représentant $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$.

Deux intégrations successives associées aux conditions initiales sur la vitesse et la position, conduisent aux équations horaires du mouvement.

$\mathring{\mathring{x}}=\dfrac{d\,\mathring{x}}{dt}=-K\,\mathring{x}$; $\ln\left(\dfrac{\mathring{x}}{v_0\cos\alpha}\right)=-Kt$ donc $\mathring{x}=v_0\cos\alpha\times e^{-Kt}$; soit $x=-\dfrac{1}{K}v_0\cos\alpha\,(e^{-Kt}-1)$.

$\overset{\circ\circ}{y} = -g - K\overset{\circ}{y}$; $\ln\left(\dfrac{g + K\overset{\circ}{y}}{g + Kv_0 \sin\alpha}\right) = -Kt$ donc $K\overset{\circ}{y} = (g + Kv_0 \sin\alpha)\,\mathrm{e}^{-Kt} - g$

soit finalement $y = \dfrac{g + Kv_0 \sin\alpha}{K^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-Kt}\right) - \dfrac{gt}{K}$.

En revanche $\overset{\circ\circ}{z} = 0$; $\overset{\circ}{z} = 0$ et $z = 0$.

La trajectoire prend l'allure d'une parabole déformée limitée par une asymptote verticale ; en effet pour t tendant vers l'infini, x tend vers une limite $x_l = \dfrac{v_0 \cos\alpha}{K}$, pendant que y tend vers $-\infty$.

Pour les petites valeurs de $\dfrac{k}{m}$, il est possible de faire un développement limité de ces relations. On retrouve alors les expressions du cas sans frottement.

Le sommet de la trajectoire est atteint pour $\overset{\circ}{y} = 0$ alors $t_S = \dfrac{1}{K}\ln\left(\dfrac{g + Kv_0 \sin\alpha}{g}\right)$ et

$x_S = \dfrac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g + Kv_0 \sin\alpha}$; $y_S = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{K} - \dfrac{g}{K^2}\ln\left(\dfrac{g + Kv_0 \sin\alpha}{g}\right)$.