TP : UTILISATION DU TABLEAU DE LA TI-*n*spire.

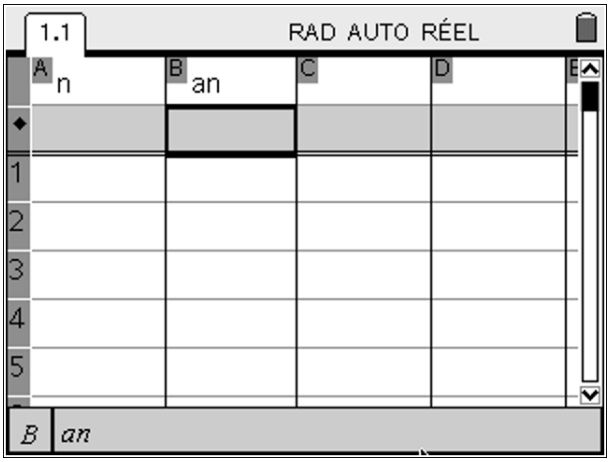
On considère les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_0 = 2 \\ b_{n+1} = \sqrt{b_n + 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_0 = 2 \\ c_{n+1} = \dfrac{c_n^2 + 1}{2c_n - 1} \end{cases}$$

I OBSERVATION DE LA CONVERGENCE À L'AIDE DU TABLEUR

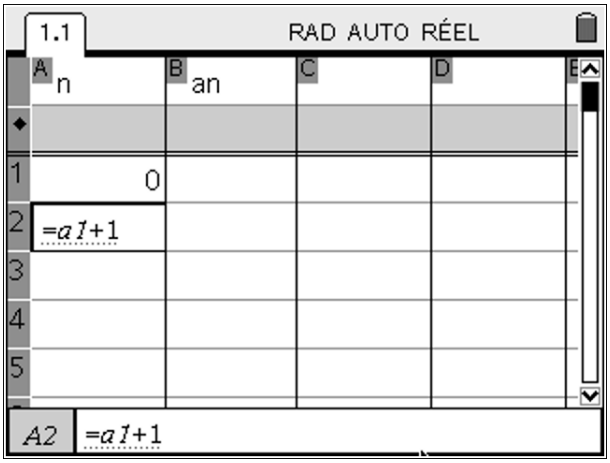
1. Etude du comportement de la suite (a_n) lorsque n devient très grand à l'aide de l'application « tableur&liste »

Créer dans un classeur vierge en appuyant sur la touche accueil (⌂) puis sélectionner l'application **tableur&liste**. Nommer les colonnes A et B en entrant respectivement $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{a_n}$ sur la 1ère ligne du tableur.



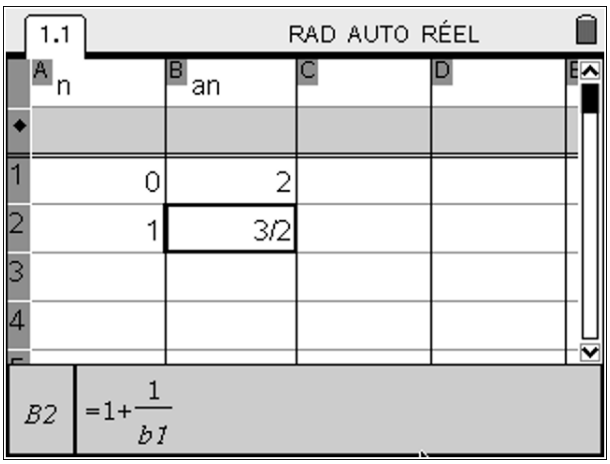
Dans la cellule A1, entrer la valeur 0.

Dans la cellule A2 entrer la formule =a1+1

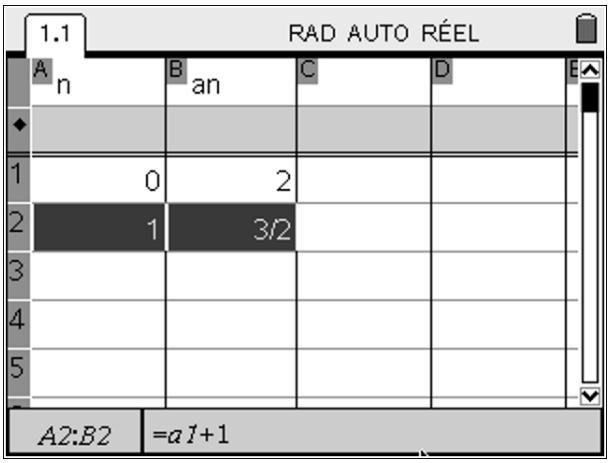


Dans la cellule B1, entrer la valeur 2.

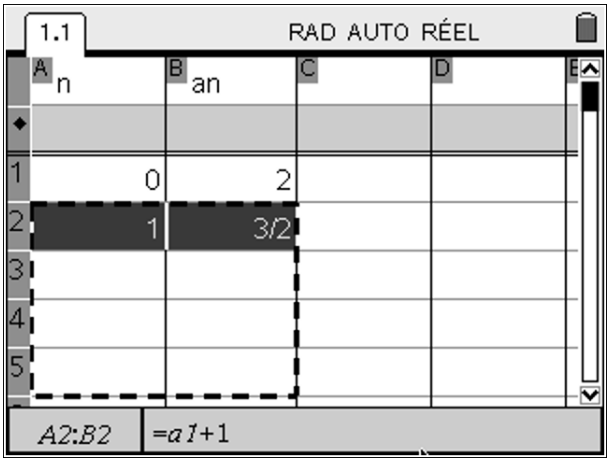
Dans la cellule B2 entrer la formule = 1+1/b1



Sélectionner les cellules A2 et B2 en se plaçant sur A2 puis en appuyant sur ⇧ et en se déplaçant sur B2 en maintenant cette touche enfoncée.

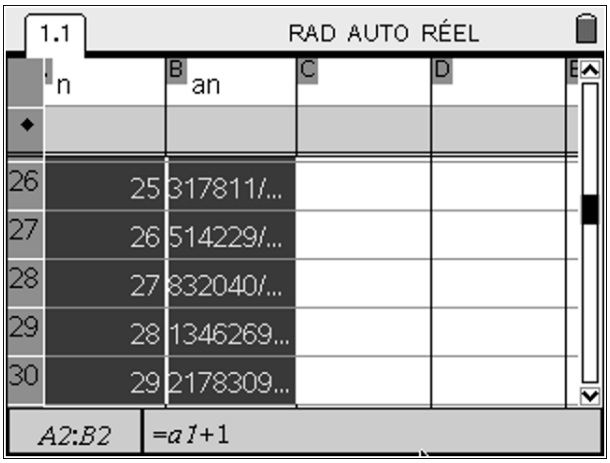


Dans menu, sélectionner **données** puis **Saisie rapide** et se déplacer vers le bas jusqu'à la ligne 30 et valider à l'aide de enter

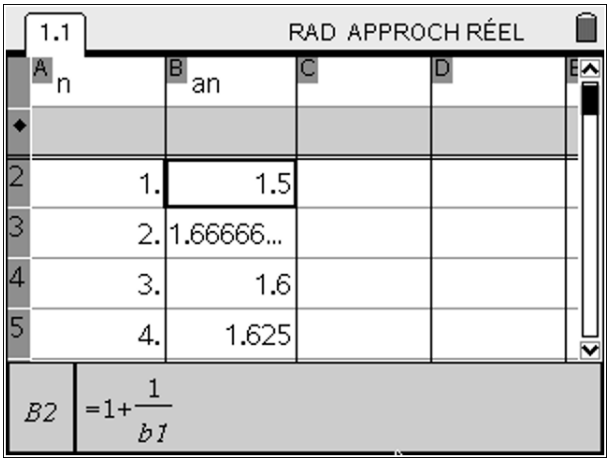


On obtient les valeurs suivantes.

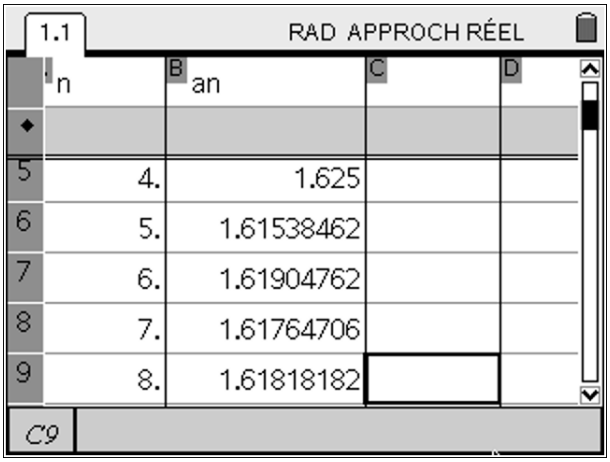
Mais la lecture sous forme de fractions n'est pas adaptée pour cet exercice.
Le tableur du TI-*n*spire effectue des calculs exacts (on est en mode AUTO).



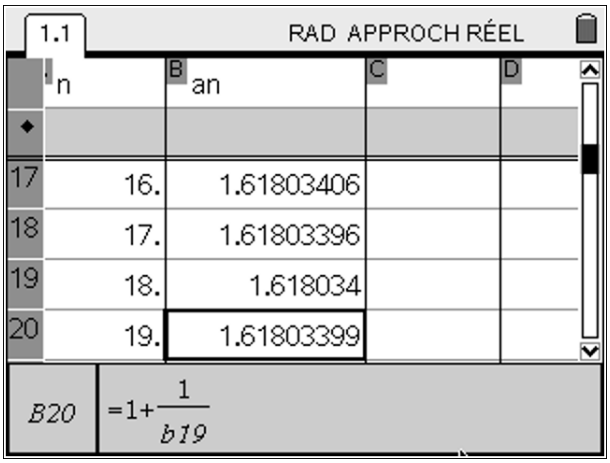
On souhaite avoir dans ce classeur des valeurs approchées à 10^{-9} près :
Pour cela taper sur la touche accueil ⌂, sélectionner **infos système** puis **Réglages du classeur**, sur la ligne **Afficher chiffres** valider l'option **Flottant9**.
Puis descendre sur la ligne **Automatique et approché** en utilisant par exemple la touche tab et valider l'option **approché** et valider le choix par **OK.**



Après avoir sélectionné une cellule de la colonne B, aller dans le menu, sélectionner **Actions** puis **Redimensionner** et agrandir la colonne à l'aide de la flèche droite, valider avec la touche (enter) et quitter à l'aide de la touche (esc).



Vérifier que les huit décimales se stabilisent vers la valeur **1, 618 033 99** lorsque le rang $\boldsymbol{n}$ est assez grand.



Réponse : Le plus petit entier n_1 pour lequel on obtient cette valeur est $n_1 = 20$

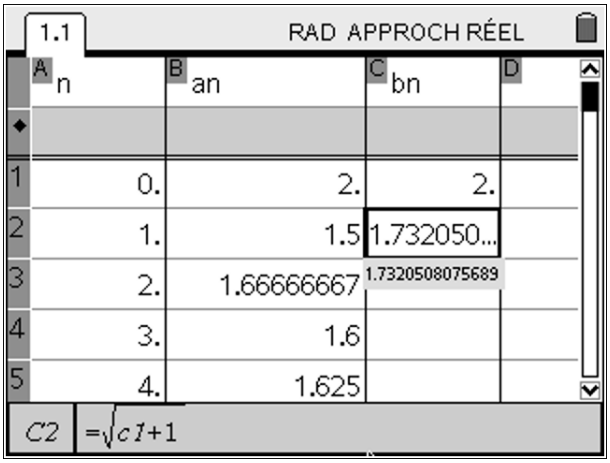
Remarque : On peut ainsi conjecturer que cette suite **converge** vers un réel dont une valeur approchée est 1,618 033 988 749 89 .

Ce réel, noté $\boldsymbol{\Phi}$ est appelé **nombre d'or** et on montre que $\boldsymbol{\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

2. Etude des suites (b_n) et (c_n).

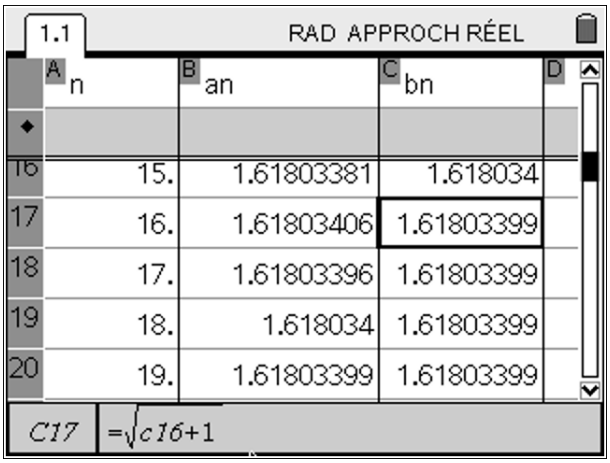
On nomme b_n la colonne C.
Dans la cellule $C1$ on entre le premier terme de la suite (b_n), c'est-à-dire 2 ($b_0 = 2$).

Dans la cellule $C2$ on entre la formule $= \sqrt{C1 + 1}$.



Puis à l'aide de la saisie rapide on recopie la formule jusqu'en C31.
On vérifie que les huit premières décimales de b_n se stabilisent également vers la valeur **1, 618 033 9**

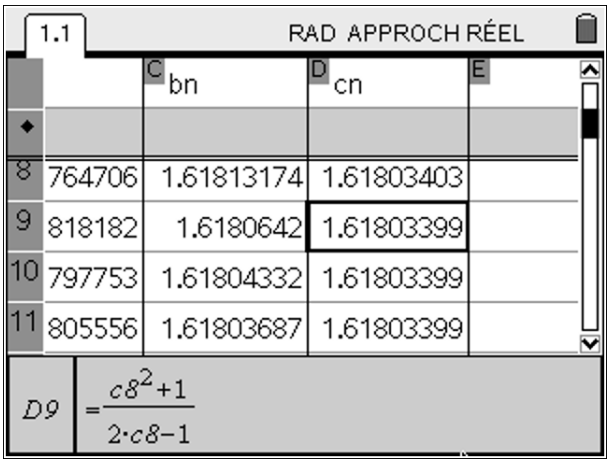
Réponse : Le plus petit entier n_2 pour lequel les huit premières décimales de b_n se stabilisent vers 1, 618 033 9 est $n_2 = 16$



On nomme c_n la colonne D.
Dans la cellule $D1$ on entre le premier terme de la suite (c_n), c'est-à-dire 2 ($c_0 = 2$).

Dans la cellule $D2$ on entre la formule $= \frac{C1^2+1}{2C1-1}$.
A l'aide de la saisie rapide on recopie la formule jusqu'en D31.

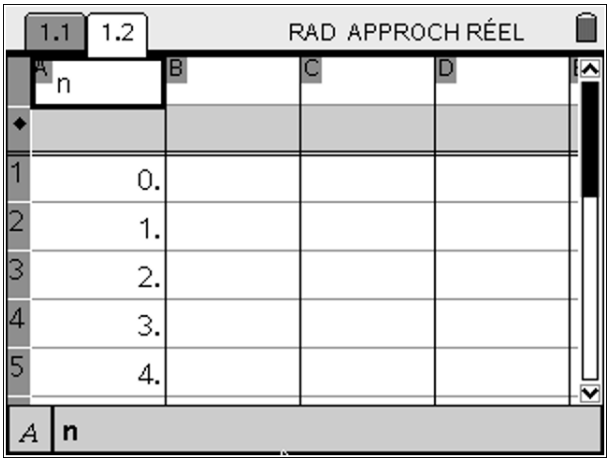
Réponse : Le plus petit entier n_3 pour lequel les huit premières décimales de c_n se stabilisent vers 1, 618 033 9 est $n_3 = 9$



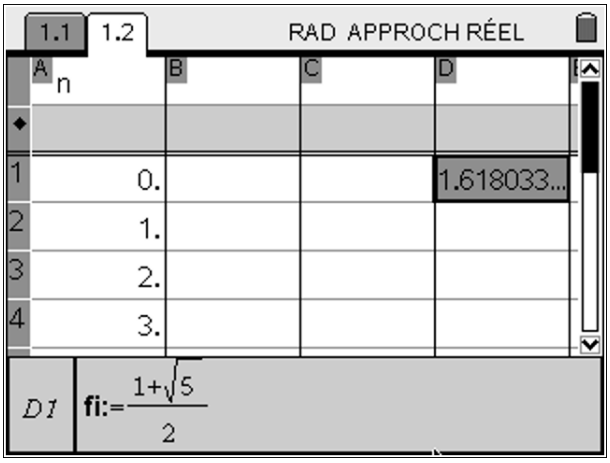
II OBSERVATION DES ÉCARTS À LA VALEUR LIMITE Φ.

On se propose de déterminer, pour chacune des trois suites, l'indice du premier terme qui approche à moins de 10^{-12} la valeur de Φ.

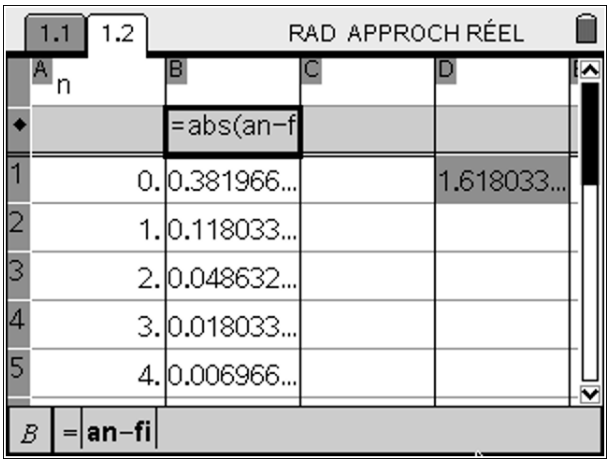
1. Suite (a_n) **:**
Dans la colonne A de la page 2, reporter les valeurs de la colonne A page 1.
Pour cela, entrer $\boldsymbol{n}$ comme titre de la colonne A.



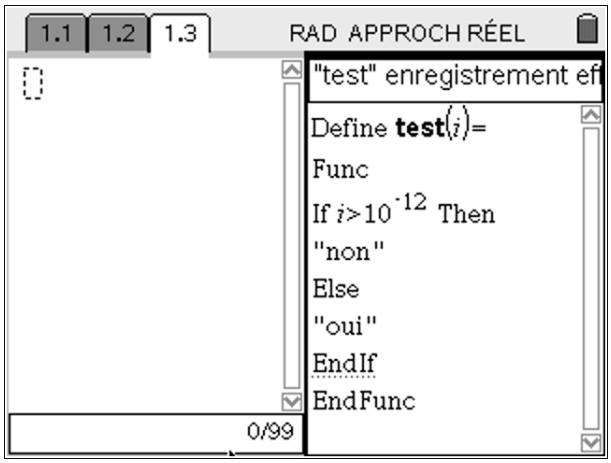
Dans D1, définir la variable fi permettant de calculer le nombre d'or $fi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



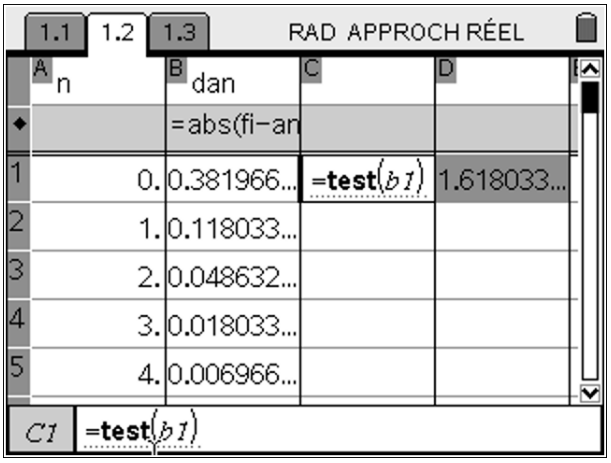
Dans la colonne B, entrer dans la case en dessous de B la formule pour calculer $|a_n - \Phi|$ qui s'écrit $= abs(an - fi)$ (vous pouvez trouver la valeur absolue dans le catalogue en appuyant sur la touche ctrl)

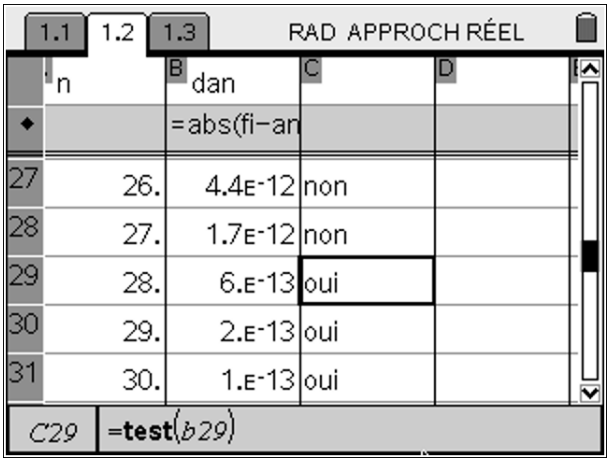


Il faut ouvrir une nouvelle page en appuyant sur la touche accueil (⌂) puis sélectionner l'application **calculs** pour définir une fonction qui permettra de tester si la condition requise est vérifiée.
On utilise (menu) **Fonctions & Programmes | Nouveau et choisir Fonction.**
Après l'écriture du programme, ne pas oublier de l'enregistrer en appuyant sur (menu) **Vérifier la syntaxe et enregistrer**



On se sert de cette fonction pour vérifier si l'écart entre Φ et une valeur a_n donnée est supérieur ou inférieur à 10^{-12} : il suffit de rentrer dans la cellule C2 la formule : $= test(b1)$ et d'étendre celle-ci vers le bas.

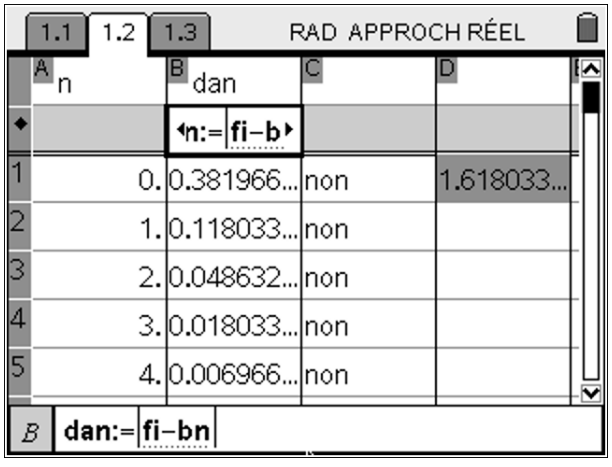


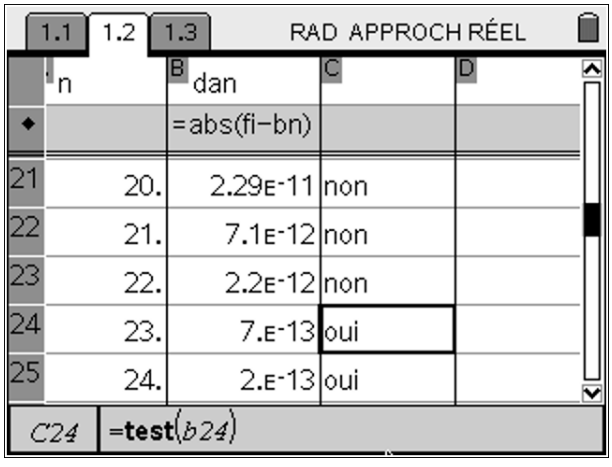


Réponse : A partir de $n = 28$ on a $|a_n - \Phi| \leq 10^{-12}$

2. Suites (b_n)et (c_n) :

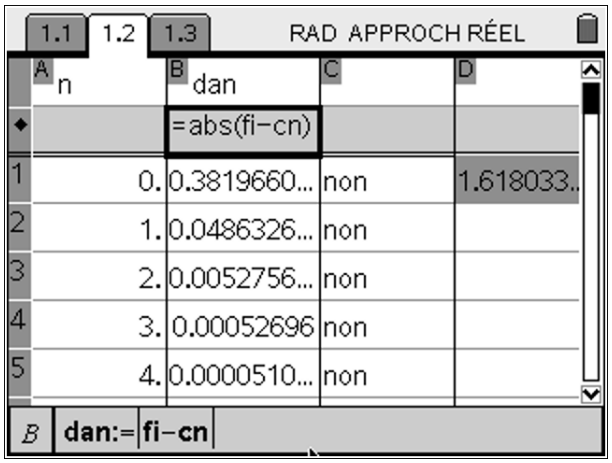
Même travail avec la suite (b_n) :





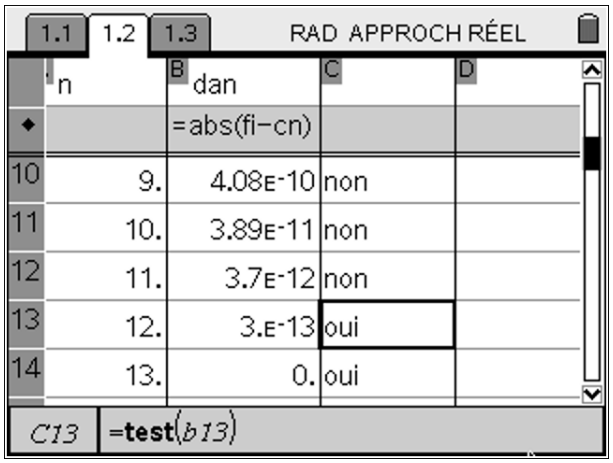
Réponse : A partir de $n = 23$ on a $|b_n - \Phi| \leq 10^{-12}$

Même travail avec la suite (c_n) :



	n	dan		
		=abs(fi−cn)		
1	0.	0.3819660...	non	1.618033..
2	1.	0.0486326...	non	
3	2.	0.0052756...	non	
4	3.	0.00052696	non	
5	4.	0.0000510...	non	

B dan:=fi−cn



	n	dan		
		=abs(fi−cn)		
10	9.	4.08E-10	non	
11	10.	3.89E-11	non	
12	11.	3.7E-12	non	
13	12.	3.E-13	oui	
14	13.	0.	oui	

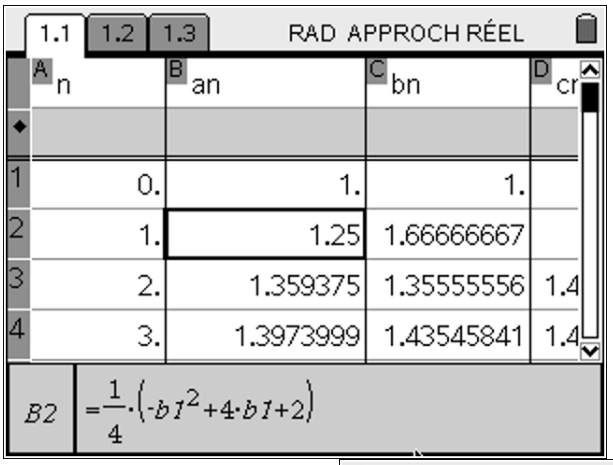
C13 =test(b13)

Réponse : A partir de $n = 12$ on a $|c - \Phi| \leq 10^{-12}$

III Pour les rapides

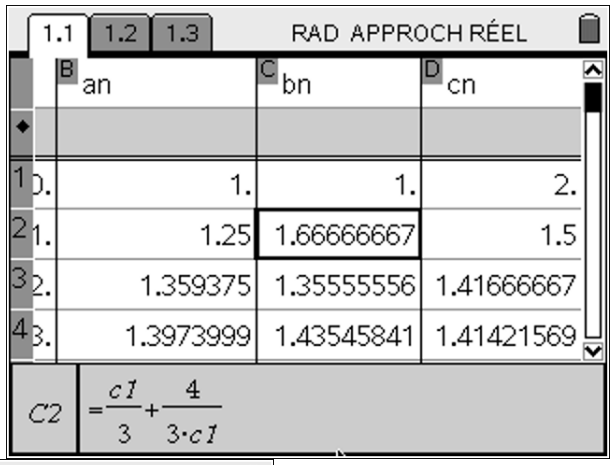
Réaliser le même travail que dans les questions ***I*** et ***II*** précédentes, avec trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) **dont le premier terme est égal à 1** et définies, par les formules suivantes :

Pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = \frac{1}{4}(-a_n^2 + 4a_n + 2)$; $b_{n+1} = \frac{b_n}{3} + \frac{4}{3b_n}$; $c_{n+1} = \frac{1}{2}\left(c_n + \frac{2}{c_n}\right)$.



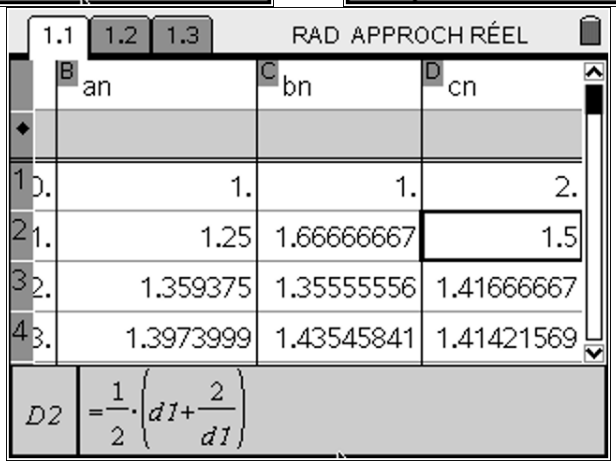
	n	an	bn	cr
1	0.	1.	1.	
2	1.	1.25	1.66666667	
3	2.	1.359375	1.35555556	1.4
4	3.	1.3973999	1.43545841	1.4

B2 $=\frac{1}{4}\cdot(-b1^2+4\cdot b1+2)$



	an	bn	cn
0.	1.	1.	2.
1.	1.25	1.66666667	1.5
2.	1.359375	1.35555556	1.41666667
3.	1.3973999	1.43545841	1.41421569

C2 $=\frac{c1}{3}+\frac{4}{3\cdot c1}$



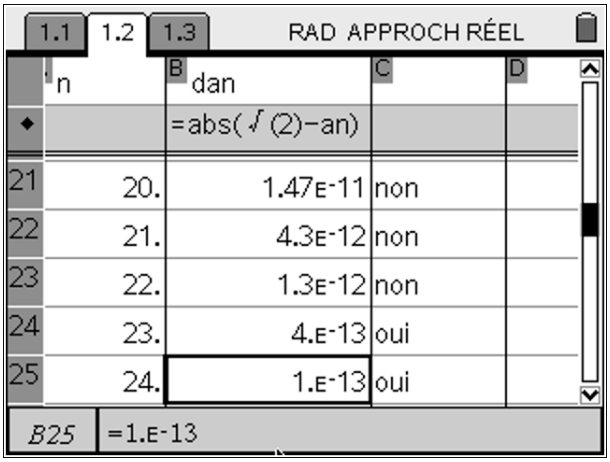
	an	bn	cn
0.	1.	1.	2.
1.	1.25	1.66666667	1.5
2.	1.359375	1.35555556	1.41666667
3.	1.3973999	1.43545841	1.41421569

D2 $=\frac{1}{2}\cdot\left(d1+\frac{2}{d1}\right)$

On peut conjecturer que ces 3 suites convergent vers $\sqrt{2}$.

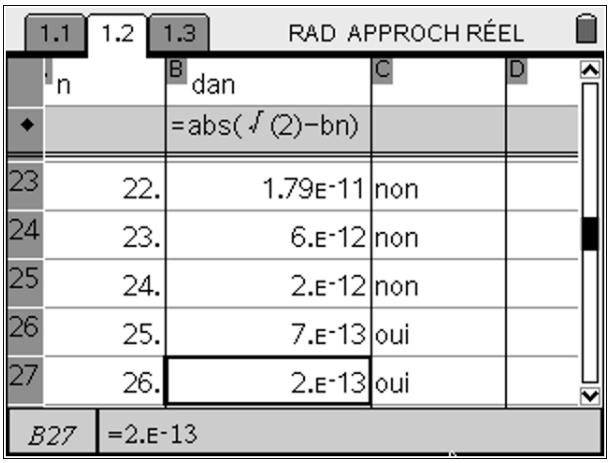
Pour la suite (a_n) :

A partir de $n = 24$ on a $|a_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-12}$



Pour la suite (b_n) :

A partir de $n = 25$ on a $|b_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-12}$



Pour la suite (c_n) :

A partir de $n = 6$ on a $|c_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-12}$

