S3 – SUITES INSTABLES

TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : suite récurrente, suite récurrente double, suite géométrique, suite définie par une intégrale, convergence, démonstration par récurrence.

1. Objectifs

Acquérir un esprit critique sur les conjectures établies sur la base de calculs approchés des calculatrices, mobiliser l'ensemble de ses connaissances pour résoudre des problèmes sur les suites.

2. Commentaires

Les compétences et connaissances en jeu dans ces problèmes, relèvent d'activités complémentaires aux applications directes du programme. Le niveau n'est pas élémentaire et relève donc de travaux dirigés bien encadrés. Toutefois, les exemples proposés sont importants puisqu'ils montrent que les calculs approchés, même avec une très grande précision, peuvent donner des résultats aberrants lorsqu'ils sont réitérés plusieurs fois. Il ne s'agit pas d'une curiosité anecdotique, mais d'une question centrale pour les programmeurs d'algorithmes.

3. Mise en œuvre

Exemple 1 :

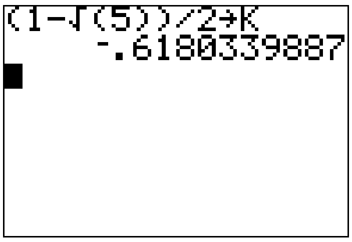
1) Il faut vérifier l'hypothèse de récurrence pour $n = 0$ et $n = 1$, car l'égalité $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ n'est définie que pour $n \geq 0$, donc pour $n + 2 \geq 2$.
L'hypothèse de récurrence n'est pas triviale et mérite d'être précisée aux élèves :
Hypothèse à l'ordre n ($n \geq 1$) : **quel que soit $p \leq n$**, $u_p = k^p$.

$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} = k^n + k^{n-1} = k^{n-1}(k+1)$. On montre alors qu'avec $k = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $1 + k = k^2$.

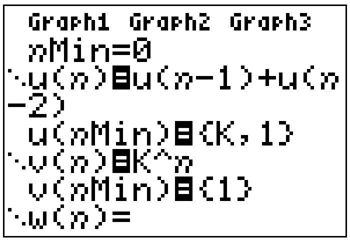
On en déduit que $u_{n+1} = k^{n+1}$ et donc que, pour tout $p \leq n + 1$, $u_p = k^p$.

2) L'annexe à la fin de la fiche élève, montre comment obtenir une table de valeurs avec la calculatrice. Pour le nombre k, il est assez commode de stocker sa valeur dans la variable K (*écran* 1).

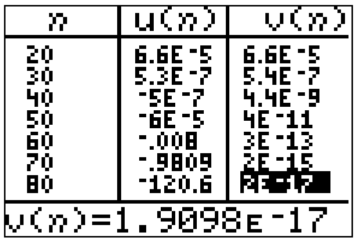
Ainsi, à chaque fois que l'on en a besoin, il suffit de taper (alpha) **[K]**.
On saisit les deux formes de la suite (u_n) dans la machine (*écran* 2).



écran 1



écran 2



écran 3

À partir d'un certain rang, les deux définitions ne donnent pas les mêmes termes sur la calculatrice (*écran* 3). Si la deuxième définition donne une suite qui semble bien converger vers 0, ce n'est pas le cas de la première.

3) a) (v_n) est une suite géométrique, elle converge si et seulement si $|k'| < 1$ ou $k' = 1$.

On arrive à : (v_n) converge si et seulement si $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} < \varepsilon \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) La démonstration se fait en posant l'hypothèse de récurrence à l'ordre n ($n \geq 1$) suivante :

$$\textbf{quel que soit } p \leq n,\ w_p = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p + \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p.$$

La divergence de la suite lorsque ε est non nul vient du 2ème terme qui diverge puisque $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$.

c) $(u_n) = (w_n)$ lorsque $k = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Or, lorsque l'on saisit cette valeur dans la calculatrice, c'est une approximation à 10^{-14} près (i. e. $k + \varepsilon$) qui est mémorisée. D'où la divergence apparente de (u_n).

Par contre, (v_n) converge car ε, très proche de 0, reste dans l'intervalle $\left]\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$.

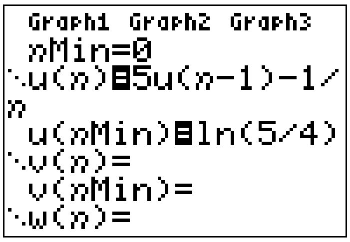
Exemple 2 :

1) a) $I_n = \int_0^1 \dfrac{t^n}{5-t}\,dt$, d'où : $I_0 = \ln \dfrac{5}{4}$.

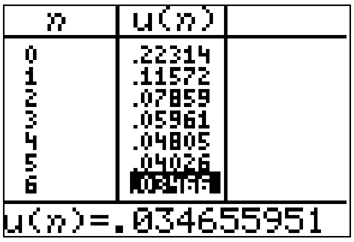
b) Pour démontrer que $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{4(n+1)}$, on encadre $\dfrac{t^n}{5-t}$ à partir de $0 \leq t \leq 1$. La limite de I_n est 0.

c) De $\dfrac{t^{n+1}}{5-t} = -t^n + 5\dfrac{t^n}{5-t}$, on déduit facilement la formule de récurrence : $I_{n+1} = 5\,I_n - \dfrac{1}{n+1}$.

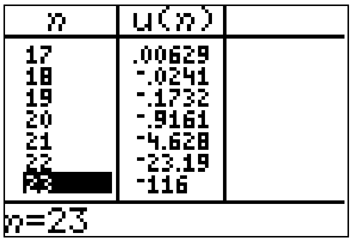
2) Il faut rentrer $u(n)$ en fonction de $u(n-1)$. La formule de récurrence devient donc $u_n = 5\,u_{n-1} - \dfrac{1}{n}$ (*écran* 4). Tout va bien au début (*écran* 5), mais … les soucis arrivent à partir de u_{18} (*écran* 6) !



écran 4



écran 5



écran 6

3) Explication : Soit la suite (u_n) de 1er terme u_0 et de terme général $u_n = I_n + 5^n\,(u_0 - \ln\dfrac{5}{4})$.

a) La limite de la suite (u_n) est $-\infty$ si $u_0 < \ln\dfrac{5}{4}$, $+\infty$ si $u_0 > \ln\dfrac{5}{4}$, et 0 si $u_0 = \ln\dfrac{5}{4}$.

b) Pour tout entier n, $u_{n+1} = 5\,u_n - \dfrac{1}{n+1}$. Donc (u_n) et (I_n) sont définies avec la même relation de récurrence.

Donc, si $u_0 = \ln\dfrac{5}{4}$, alors $(u_n) = (I_n)$ et elles ont pour limite 0. Si $u_0 \neq \ln\dfrac{5}{4}$, alors (u_n) diverge vers l'infini.

c) Lorsque l'on saisit $\ln\dfrac{5}{4}$ comme valeur de u_0 sur la calculatrice, l'approximation mémorisée est : 0,2231435513142 (les 3 derniers chiffres étant cachés). C'est une approximation par défaut. On est dans le cas où $u_0 < \ln\dfrac{5}{4}$, la limite est donc $-\infty$ et non 0.

Exemple 3 :

1) a) $I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$, d'où : $I_0 = \dfrac{e^3-1}{3}$.

b) (I_n) est positive et décroissante (il suffit d'étudier le signe de $I_{n+1} - I_n$). La suite (I_n) est donc convergente.

2) On admet que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n}{3}I_{n-1}$ (On pourrait le prouver par une intégration par parties, mais cette méthode n'est pas un attendu du programme en vigueur à la rentrée 2012).

Après avoir saisi la suite (u_n), on génère une table de valeurs des termes de la suite. Ca se passe comme prévu …. jusqu'à ce que ça déraille ... (à partir du 24ème terme) !