

EP 012 - 2007 : L'équerre

Auteur du corrigé : Alain Soléan

TI-Nspire™ / TI-Nspire™ CAS

Avertissement : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site <http://education.ti.com/france>, menu Ressources pédagogiques.

Fichier associé : EP012_2007_Equerre.tns

1. Le sujet

Sujet 012 de l'épreuve pratique 2007 – Etude de lieux géométriques

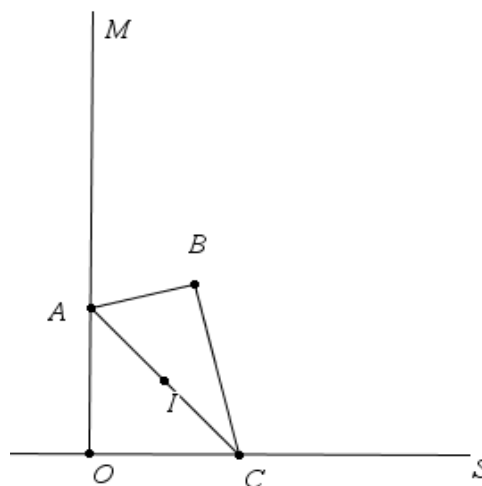
Énoncé

Le triangle ABC représente une équerre telle que $AB = 3$, $AC = 6$ et l'angle B est droit.

Les points A et C glissent respectivement sur les demi-droites perpendiculaires [OM) et [OS).

Le point I est le milieu du segment [AC].

On s'intéresse aux lieux des points I et B.



- Observer les propriétés de la figure.
Avec un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant la situation.
- Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point I quand C décrit la demi droite [OS).
Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?
- Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point B quand C décrit la demi droite [OS).
Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?
- Donner les mesures des angles de l'équerre, puis celle de $\widehat{AOB}$ (A distinct de O).
 - En déduire que le lieu de B est inclus dans une courbe simple dont on précisera la nature.
 - Démontrer que : $OB = 6 \sin(\widehat{AOB})$.
 - En déduire le lieu de B.

Production demandée

- Réponse écrite pour la question 4.

Compétences évaluées

- Compétences TICE**
 - Construire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique ;
 - Visualiser un lieu ;
 - Tester les conjectures émises.
- Compétences mathématiques**
 - Exploiter les propriétés du triangle rectangle ;
 - Utiliser les lignes trigonométriques dans un triangle.

2. Corrigé

1) Construction de la figure

Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

Construire un **point**, le nommer O .

Construire une **demi-droite** $[OM)$, puis la **droite perpendiculaire** à $[OM)$ passant par O , nommée $[OS)$.

Construire 2 **segments**, demander leur **longueur** et régler les longueurs à 3 cm et 6 cm.

Placer un **point sur** $[OS)$; le nommer C .

A l'aide de l'outil **Compas**, construire un **cercle** (C_1) de centre C et de rayon 6 cm.

Construire le **point d'intersection** de ce cercle avec $[OM)$, le nommer A . Construire le **segment** $[AC]$.

A l'aide de l'outil **Compas**, construire un **cercle** (C_2) de centre A et de rayon 3 cm.

Construire le **milieu** de $[AC]$, le nommer I .

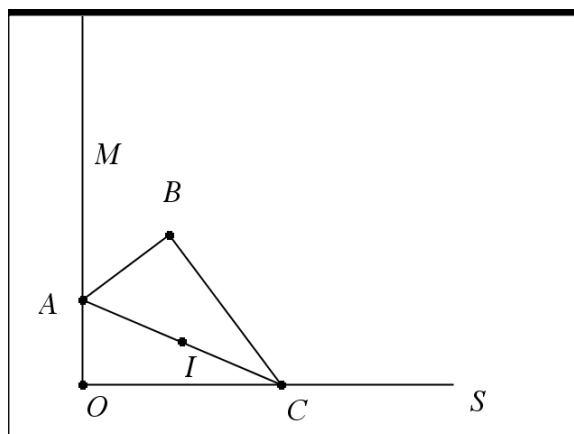
Construire le **cercle** (C_3) de centre I passant par C .

Construire les **points d'intersection** des cercles (C_3) et (C_2) . Nommer B le point d'intersection situé dans le quart de plan contenant I .

Construire les **segments** $[AB]$ et $[BC]$.

Cacher les cercles.

Les écrans sont obtenus à partir du logiciel sur ordinateur en « vue nomade ».



2) Lieu du point I

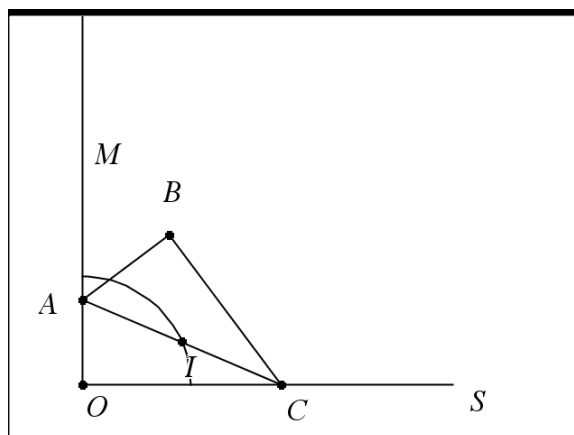
Avec l'outil **Lieu** faire apparaître le lieu du point I .

On peut conjecturer que I semble décrire un arc de cercle.

En effet, le triangle AOC est rectangle en O et I est le milieu de $[AC]$ donc on a : $AI = OI$. Comme d'autre part, $AI = IB = 3$, on a : $OI = 3$.

Donc I se trouve sur un cercle de centre O et de rayon 3

L'arc de cercle est en fait un quart de cercle limité par les demi-droites $[OM)$ et $[OS)$.

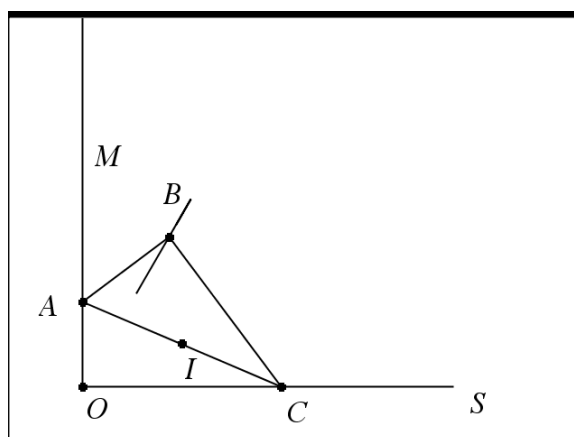


3) Lieu du point B

Sur la figure précédente, **Cacher** le lieu du point I et demander le **Lieu** du point B .

Le point B semble décrire un segment de droite.

On peut conjecturer que les valeurs minimale et maximale de OB sont obtenues respectivement quand A est en O et quand $OABC$ est un rectangle.



4) Démonstrations

Le triangle ABC est rectangle en B, $AB = 3$ et $AC = 6$ donc ABC est un demi-triangle équilatéral.

On peut donc en conclure que : $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$ et $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{3}$.

Les quatre points O, A, B et C sont sur un même cercle de centre I donc les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{ACB}$ sont inscrits et interceptent le même arc ; ils sont donc égaux, d'où $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{6}$.

On peut donc affirmer que le point B appartient à la droite passant par O, telle que $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{6}$.

Dans le triangle OAB, la « relation des sinus » permet d'écrire : $\frac{OB}{\sin(\widehat{OAB})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{AOB})}$.

Alors, $\frac{OB}{\sin(\widehat{OAB})} = \frac{3}{\sin(\frac{\pi}{6})}$; de là, $OB = 6 \sin(\widehat{OAB})$.

La longueur de OB est maximale quand [OB] est un diamètre du cercle de centre I et de rayon 3, donc quand $OB = 6$. On a alors $\sin(\widehat{OAB}) = 1$, donc le triangle OAB est rectangle en A. Le quadrilatère OABC est alors un rectangle.

Lorsque A est en O, on a : $OB = AB = 3$ et $\widehat{OAB} = \frac{\pi}{6}$.

De là, on a $3 \leq OB \leq 6$. B décrit donc un segment de droite.

3. Pour aller plus loin

Le problème reste le même si l'on modifie les valeurs de AC et AB (en conservant $AB < AC$) ; seuls le rayon du cercle que décrit I, la pente et la longueur du segment de droite décrit par B sont modifiés.