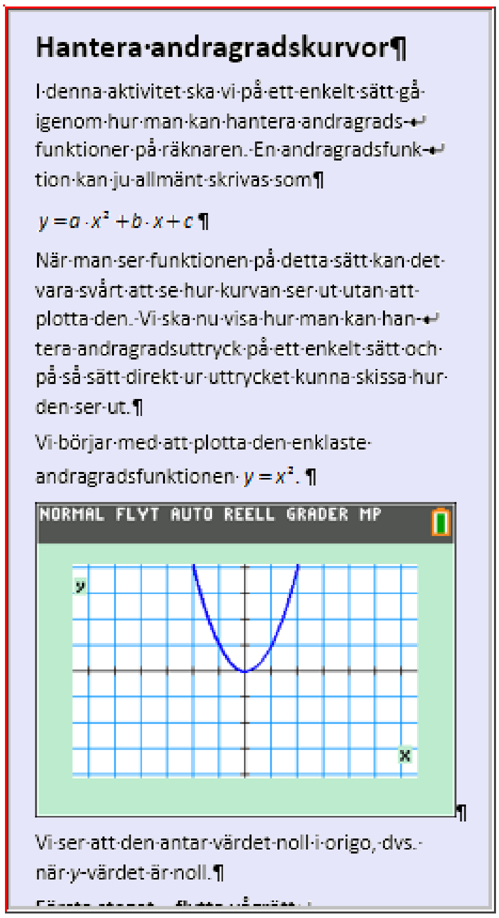
Hantera andragradskurvor del 2

I den första aktiviteten om andragradsfunktioner tittade vi på hur utseendet på kurvorna när vi hade olika värden på k, a och b i uttrycket $y = k\cdot(x-a)^2 + b$. Se nedan.



Hantera andragradskurvor

I denna aktivitet ska vi på ett enkelt sätt gå igenom hur man kan hantera andragradsfunktioner på räknaren. En andragradsfunktion kan ju allmänt skrivas som

$y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$

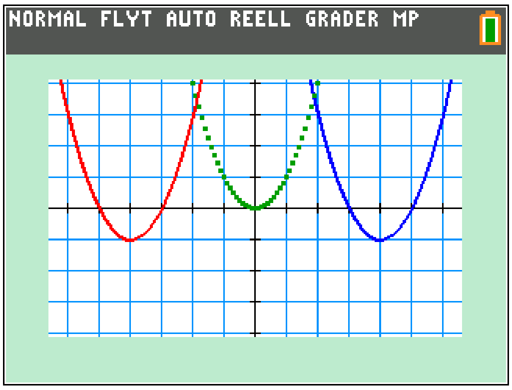
När man ser funktionen på detta sätt kan det vara svårt att se hur kurvan ser ut utan att plotta den. Vi ska nu visa hur man kan hantera andragradsuttryck på ett enkelt sätt och på så sätt direkt ur uttrycket kunna skissa hur den ser ut.

Vi börjar med att plotta den enklaste andragradsfunktionen $y = x^2$.

Vi ser att den antar värdet noll i origo, dvs. när y-värdet är noll.

Kurvor som har benen uppåt

Vi går nu vidare och undersöker andra egenskaper hos dessa andragradskurvor. Titta nu på kurvorna nedan. Vi har lagt in funktionen $y = x^2$ som referens.



Vi ser att kurvorna är förskjutna 4 enheter vågrätt åt höger resp. vänster och förskjutna lodrätt en enhet nedåt. De har också samma form som referenskurvan.

Det betyder att vi kan skriva funktionerna som $y = 1\cdot(x-4)^2 - 1$ resp. $y = 1\cdot(x+4)^2 - 1$.

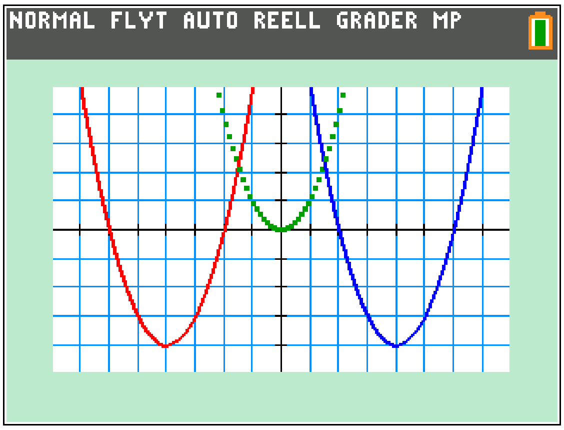
Nu ska vi titta närmare på när dessa funktioner har värdet noll. Vi kallar det för *nollställen*. För den första funktionen betyder det att

$1\cdot(x-4)^2 - 1 = 0$ som vi kan skriva om som $(x-4)^2 = 1$ genom att addera 1 till vänster- och högerled. Vänsterledet är alltid positivt eftersom det är en kvadrat och vi ser att vänsterledet får värdet 1 när x=5 och när x=3: $(5-4)^2 = 1$ och $(3-4)^2 = 1$.

På samma sätt för den andra funktionen: Vi skriver om den som $(x+4)^2 = 1$ och vi ser att vänsterledet får värdet 1 när x= - 5 och x= - 3.

Titta på graferna och se att det stämmer.

Vi tar ett exempel till:



Vi ser att kurvorna är förskjutna vågrätt 4 enheter åt höger resp. vänster och 4 steg lodrätt nedåt. Vi kan då teckna funktionerna:

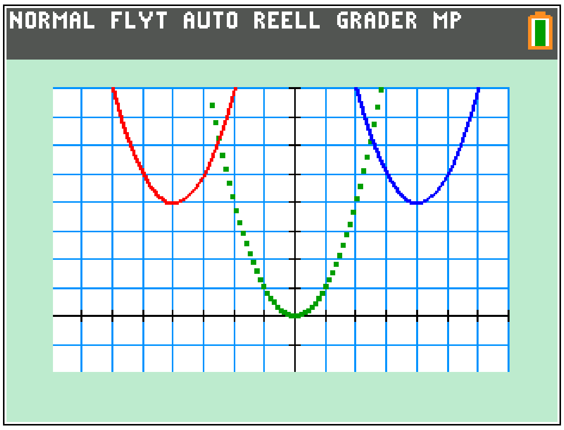
$y = (x-4)^2 - 4$ resp. $y = (x+4)^2 - 4$.

Omskrivning som i det första exemplet ger $(x-4)^2 = 4$ resp. $(x+4)^2 = 4$.
Den första får värdet 4 när x=2 och x=6 och den andra får värdet 4 när x= - 6 och x =- 2.

Det stämmer bra om vi tittar på graferna.

Vi går nu vidare.

Titta nu på de här kurvorna.



Med samma tillvägagångssätt som förut:

De är förskjutna vågrätt 4 enheter åt höger resp. vänster och 4 enheter uppåt.

Då kan vi skriva funktionerna:

$y=(x-4)^2+4$ resp. $y=(x+4)^2+4$

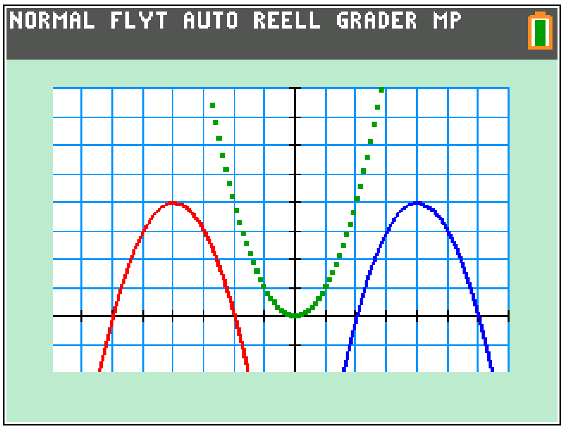
Vi gör som förut, dvs. sätter högerledet lika med noll. Vi får då:

$(x-4)^2=-4$ resp. $(x+4)^2=-4$

Att en kvadrat får ett negativt värde, - 4 i detta exempel, är ju omöjligt. Funktionerna *saknar* alltså nollställen. Det ser vi ju också om vi tittar på graferna.

Kurvor som har benen nedåt

Titta nu på dessa grafer:



Nu har vi vänt på kurvorna. De är förskjutna på samma sätt som i den översta bilden på denna sida och har samma form som vår gröna referenskurva men är vända nedåt. Vi sätter alltså ett negativt tecken framför kvadrattermen. Det gick vi igenom i den första aktiviteten.

Funktionerna kan alltså skrivas så här:

$y=-(x-4)^2+4$ resp. $y=-(x+4)^2+4$

Vi gör som förut, dvs. sätter högerleden lika med noll:

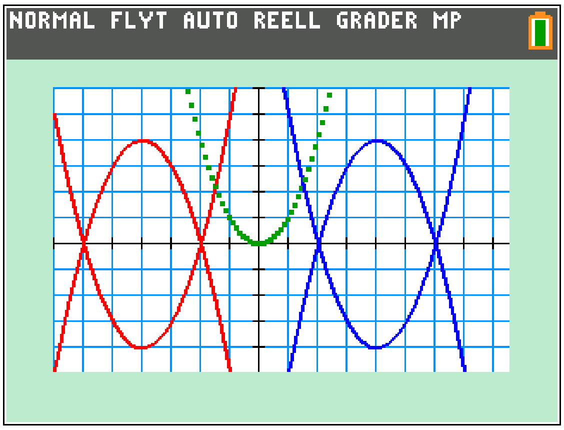
$-(x-4)^2=-4$ resp. $-(x+4)^2=-4$

Nu byter vi tecken i båda leden och får då

$(x-4)^2=4$ resp. $(x+4)^2=4$

Den första ekvationen har lösningarna *x*=6 och *x*=2 och den andra *x*= - 2 och *x*= - 6.

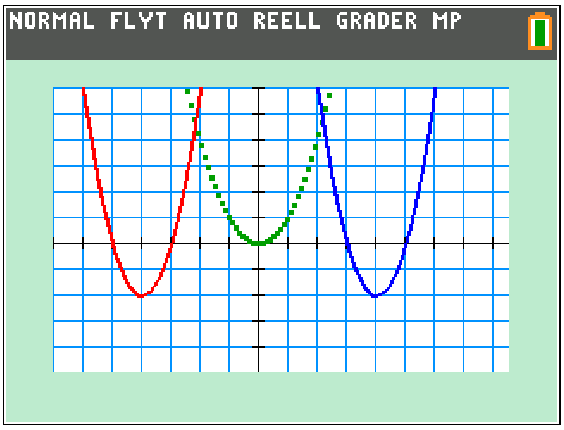
De här lösningarna känner vi igen från förra sidan. Där hade vi funktionerna $y=(x-4)^2-4$ resp. $y=(x+4)^2-4$. Vi ritar dem i samma koordinatsystem.



Vi får skärningar mellan par av kurvor just i nollställena.

Kurvor med olika form

Titta nu på de här kurvorna:



Kurvorna är vända uppåt så *k*-värdet är positivt. Titta på originalkurvan och dess minimipunkt. När *x* ökar en enhet från minimipunkten så ökar y-värdet med 1.

När x-värdet ökar med en enhet så ökar y-värdet med **2 enheter** för våra kända kurvor. Förskjutningarna i x- och y-led ser vi ju också. De är 4 enheter åt höger resp. vänster och 2 enheter nedåt. Vi kan då skriva funktionerna:

$y=2\cdot(x-4)^2-2$ resp. $y=2\cdot(x+4)^2-2.$

Om vi sätter högerleden lika med noll får vi:

$2\cdot(x-4)^2-2=0$ resp. $2\cdot(x+4)^2-2=0.$

Detta ger i första fallet (blå kurva):

$2\cdot(x-4)^2=2$

Vi förkortar med 2:

$(x-4)^2=1$

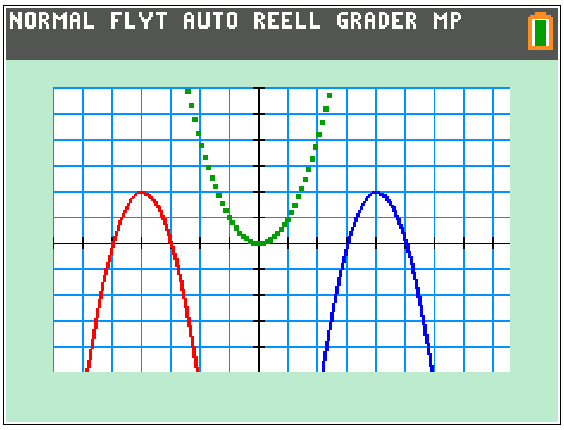
Vi ser direkt att vänsterledet är lika med 1 när x = 5 resp. x = 3 ($(5-4)^2=1,\ (3-4)^2=1$)

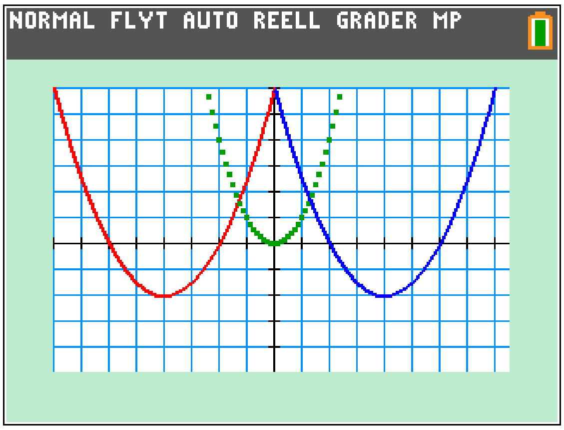
På samma sätt för den röda kurvan. Vi får:

$(x+4)^2=1$

Vänsterledet är lika med 1 när x = - 3 och x = - 5.

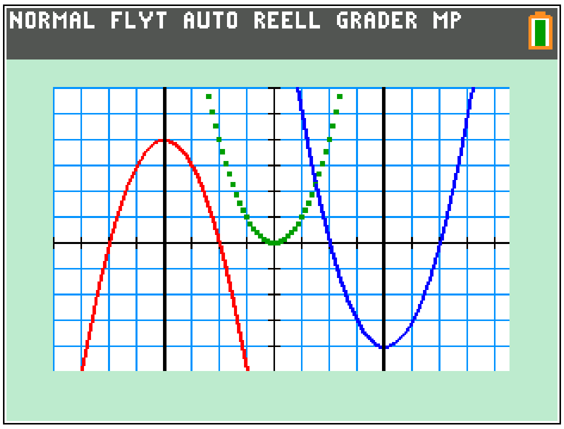
Vilka funktioner är plottade nedan? Beräkna sedan nollställena algebraiskt.





Undersöka symmetrin

Som du antagligen sett så är alla andragradsfunktioner *symmetriska* omkring en vertikal linje genom maximi- eller minimipunkten.



Här har vi nu ritat två symmetrilinjer och de går igenom max- och minpunkten, som är belägen mitt emellan kurvornas nollställen.

Avläsning:
Minpunktens koordinater kan avläsas ur grafen. Vi får (4, - 4).
Maxpunktens koordinater: (- 4, 4).

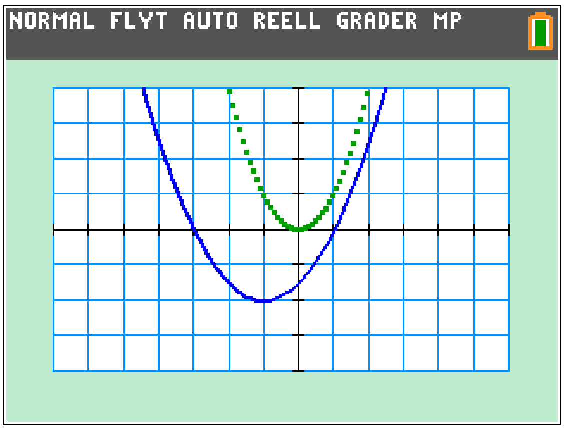
Algebraiskt
Kan vi algebraiskt räkna ut dessa koordinater utifrån funktionsuttrycken? Vi tittar på den blå kurvan först.

Nu när vi börjar bli vana så ser vi direkt att den kan skrivas som $y=(x-4)^2-4.$ Vad är nu det *minsta* värde denna funktion kan anta? Naturligtvis är det -4 eftersom en kvadrat aldrig kan bli mindre än noll och detta minsta värde antas då x=4 ($y=(4-4)^2-4=-4.$

På motsvarande sätt för den röda kurvan: $y=-(x+4)^2+4.$ Det *största* värde denna funktion kan anta är naturligtvis +4 eftersom det är ett negativt tecken framför kvadrattermen och detta största värde antas då x = - 4.

Man kan naturligtvis också beräkna nollställena och sedan ta fram mittpunkten mellan dessa nollställen.

Vi tar nu en något krångligare funktion:



Minimipunkten verkar ha koordinaterna (-1, -2).

Vi gör nu en algebraisk beräkning: Förskjutningen jämfört med referenskurvan $y = x^2$ är lätt att se: 1 enhet åt vänster och 2 enheter nedåt. Funktionens kan alltså skrivas

$$y = k(x+1)^2 - 2$$

Värdet på *k* har ju med kurvans form att göra och av figuren verkar det som när *x*-värdet i minimipunkten ökar med en enhet så ökar *y*-värdet med ½ enhet. *k*-värdet skulle alltså vara ½ och funktionen kan skrivas

$$y = \frac{1}{2} \cdot (x+1)^2 - 2$$

Det finns ett annat sätt att ta reda på *k*-värdet. Vi utgår från uttrycket $y = k(x+1)^2 - 2$ och sedan ser vi tydligt att punkten (1, 0) ligger på kurvan. Vi sätter in dessa koordinater i uttrycket:

$$0 = k(1+1)^2 - 2$$

Nu kan vi lösa ut *k*:

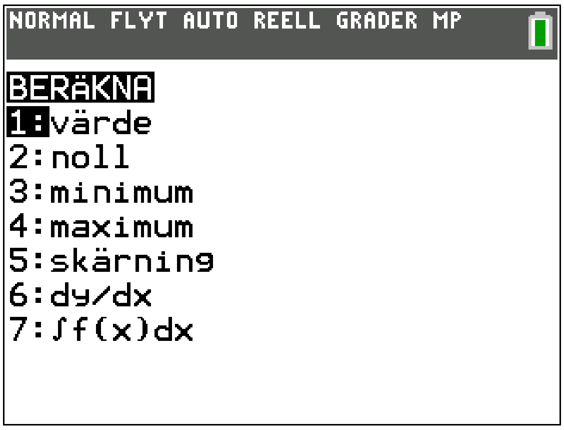
$$k = \frac{2}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}$$

Genomför nu själv, på samma sätt som på förra sidan, hur man algebraiskt kommer fram till minimipunktens koordinater.

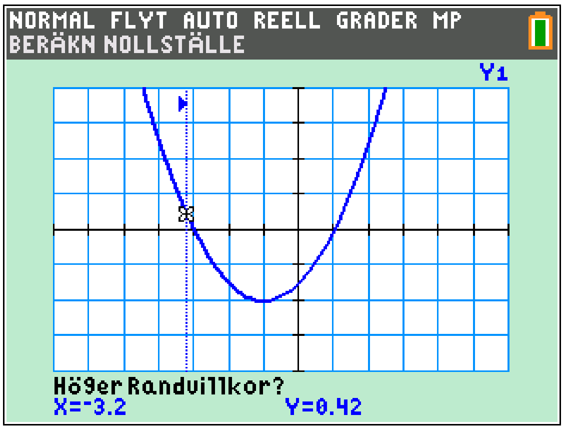
Använda räknarens inbyggda funktioner

På räknarens finns ett antal funktioner för att t.ex. beräkna nollställen och extrempunkter (max och min).

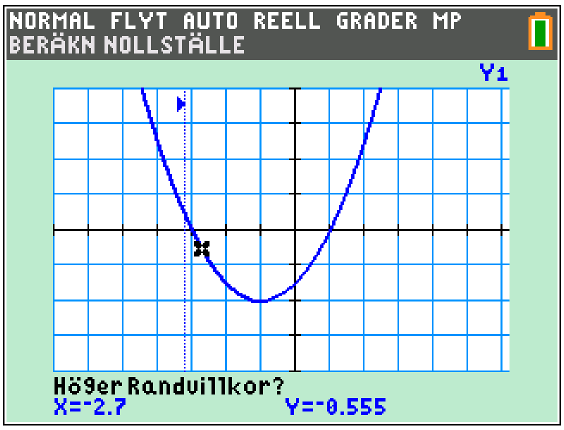
Vi antar att du har funktionen vi arbetat med i grafönstret. Tryck nu på [2nd] [CALC]. Då kommer denna meny:



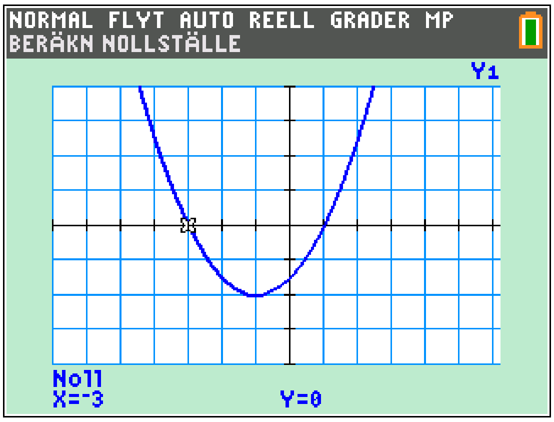
Välj nu **2:noll** som står för nollställe. Då ser du följande på skärmen:



Placera markören med piltangenterna till vänster om nollstället och tryck på [ENTER]. Nu får du nästa uppmaning om placering av den högra randpunkten.

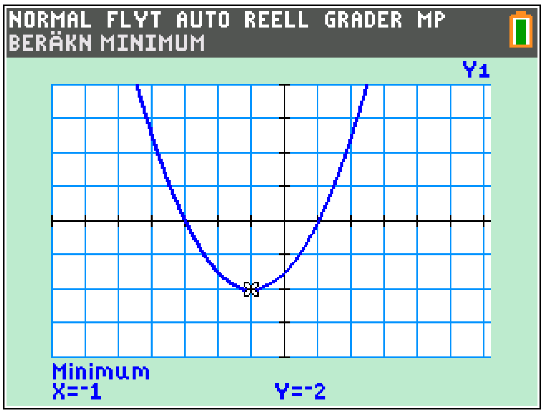


Flytta markören och tryck ENTER igen. Nu ska du gissa en punkt inom det område du in-ringat. Gör det och tryck ENTER igen. Nu kommer resultatet på skärmen.



Vi ser att vi här får det exakta värdet. Oftast är det inte så utan vi får ett närmevärde.

Man kan utföra exakt samma procedur för att beräkna minpunkten.



När man gör dessa beräkningar kan man ställa in steglängden när man spårar i graferna. Det görs i WINDOW-menyn. Man kan då ställa in spåra steg till ett lämpligt värde. Här har vi ställt in steglängden till 0,1.