

EP090 – 2008 : Étude de lieux géométriques

Auteurs du corrigé : France et Michel Villiaumey

TI-Nspire™ CAS

Avertissement : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site <http://education.ti.com/france>, menu Ressources pédagogiques.

Fichier associé : EP090_2008_Lieux_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 090 de l'épreuve pratique 2008 – Étude de lieux géométriques

Énoncé

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points $A(1; 0)$ et $B(0; 1)$. À tout point M du segment $[AB]$, on associe les points P et Q , projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (OA) et (OB) , et les points R et S , sommets du carré $PRQS$ de diagonale $[PQ]$ tels que $(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}) = \frac{\pi}{2}$.

On note aussi I le milieu du segment $[PQ]$.

Le but de l'exercice est d'étudier les lieux des points R et S lorsque M décrit le segment $[AB]$.

1.

- Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Visualiser les lieux des points R et S lorsque M décrit le segment $[AB]$, puis émettre une conjecture sur la nature de ces lieux.

2. Dans cette question on se propose d'étudier ces conjectures en se plaçant dans le plan complexe. On appelle x l'abscisse du point M , avec $x \in [0; 1]$,

- Montrer que l'affixe de M est $x + i(1 - x)$
- Déterminer l'affixe de R ou celle de S . Justifier l'une des conjectures émises à la question 1.

Production demandée

- Visualisation à l'écran de la figure ;
- Démarches et réponses argumentées pour les questions 2.a) et 2.b).

Compétences évaluées

- Compétences TICE**
 - Construction d'une figure avec un logiciel de géométrie dynamique ;
 - Visualisation d'un lieu.
- Compétences mathématiques**
 - Calculs avec les nombres complexes ;
 - Justification d'un alignement.

2. Corrigé

1) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

Menu 4 : Fenêtre B : Zoom carré afin d'obtenir un repère orthonormé.

Approcher la main des graduations de l'axe des ordonnées, fermer la main à l'aide du bouton central du pavé directionnel et tirer vers le haut, la graduation unitaire doit être 0,1. (Descendre l'origine du repère à gauche de l'écran).

Construire les points A et B :

Placer un point quelconque :

Menu 6 : Points et Droites 1 : Point

Déterminer ses coordonnées

Menu 1 : Actions 7 : Coord.et éq.

Montrer le point, valider, échapper.

Puis modifier les coordonnées : mettre le curseur sur l'abscisses du point, valider 2 fois, effacer l'abscisse et la remplacer par 1, abscisse du point A . Faire de même pour l'ordonnée, nommer le point :

Menu 1 : Actions 6 : Texte.

Cacher les coordonnées de A .

Procéder de même pour le point B .

Tracer le segment $[AB]$, placer un point M sur ce segment

Menu 6 : Points et droites 2 : Point sur

et le nommer à la volée.

Tracer les perpendiculaires aux axes de coordonnées passant par M :

Menu 9 : Constructions 1 : Perpendiculaire.

Déterminer les points d'intersection et les nommer P et Q .

Cacher les deux perpendiculaires : s'approcher de la première droite, **Ctrl Menu 3 : Afficher/cacher**, valider.

Faire de même pour la seconde droite.

Tracer le segment $[PQ]$ et déterminer son milieu I :

Menu 9 : Constructions 5 : Milieu

Montrer le segment et nommer le point à la volée.

Tracer la perpendiculaire à (PQ) passant par I , puis le cercle de centre I passant par P :

Menu 8 : Figures 1 : Cercle

Montrer le point I , valider, agrandir le cercle avec les flèches du pavé directionnel jusqu'au point P et valider.

Déterminer les points d'intersection entre le cercle et la perpendiculaire. Nommer les points R et S .

Cacher la perpendiculaire, le cercle et les valeurs unités.

Tracer le carré $PRQS$:

Menu 8 : Figures 4 : Polygone

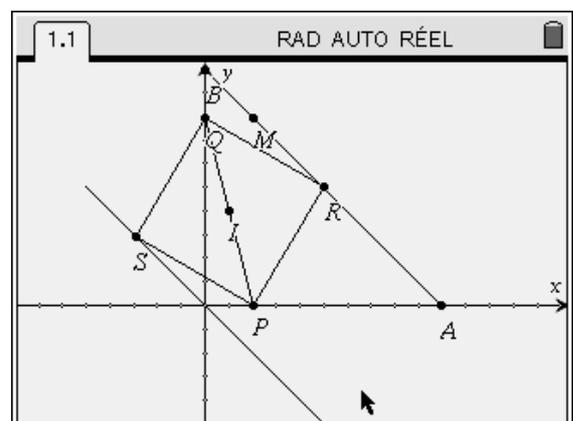
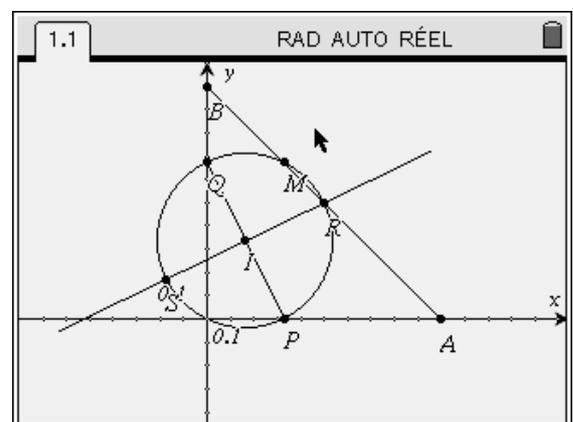
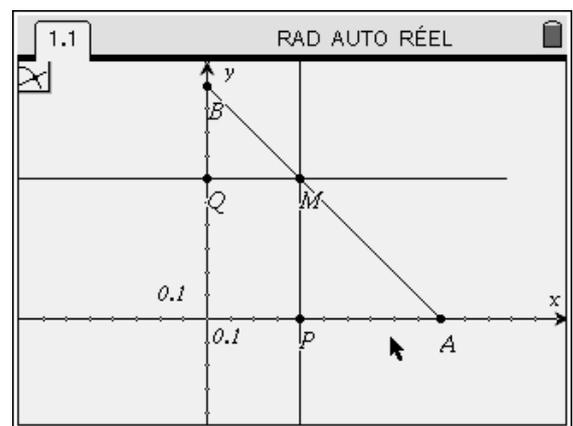
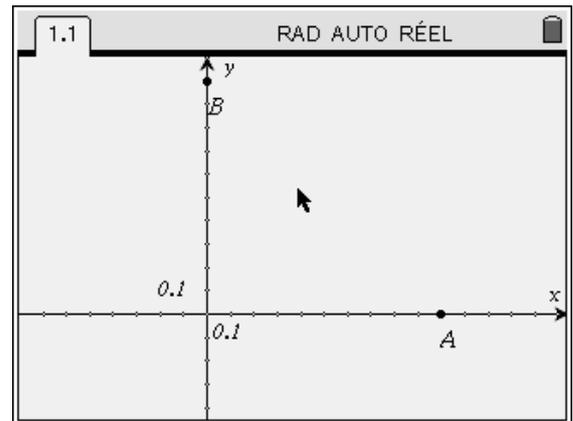
Montrer successivement les points P, R, Q, S et P en validant à chaque fois.

Déplacer le point M pour visualiser les lieux demandés, on remarque que le point R est fixe et que le point S se déplace sur un segment parallèle au segment $[AB]$.

Tracer les lieux :

Menu 9 : Constructions 6 : Lieu

Montrer le point dont on cherche le lieu avant le point M .



2) Ouvrir une nouvelle page **Calculs**

Définir les affixes des points A , B et M . (Le i complexe se trouve sur la touche grise marquée i).

a) Détermination de l'affixe de M en utilisant la condition d'alignement des 3 points A , M et B

1.1 1.2 RAD AUTO RÉEL

1 → za 1

i → zb i

x + i · y → zm x + y · i

solve(imag($\frac{za-zm}{zb-zm}$)=0,y) y = -(x-1)

zm|y=-(x-1) x-(x-1)·i

5/99

b) Détermination de l'affixe de R :

R est l'image du point P par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Le point R est invariant puisque son affixe est constante.

1.1 1.2 RAD AUTO RÉEL

x → zp x

(1-x)·i → zq (1-x)·i

$\frac{zp+zq}{2}$ → zi $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{2} \cdot i$

i·(zp-zi)+zi → zr $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i$

9/99

Détermination de l'affixe de S :

Ecrire que S est le symétrique de R par rapport à I .

Le lieu de S est le segment de droite d'équation : $y = -x$ pour $0 \leq x \leq 1$.

1.1 1.2 RAD AUTO RÉEL

$\frac{zp+zq}{2}$ → zi $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{2} \cdot i$

i·(zp-zi)+zi → zr $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i$

2·zi-zr → zs $x - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - x\right) \cdot i$

10/99

Tous les écrans de ce document sont obtenus à partir de la calculatrice.