EP 131 - 2009 : Étude d'une figure du plan

Auteur du corrigé : François TEXIER **TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version* 1.7

Fichier associé : EP131_2009_Figure_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 131 de l'épreuve pratique 2009 – Étude d'une figure du plan

Énoncé

Soit un triangle équilatéral direct ABC et soit D un point du segment [BC]. La parallèle à la droite (AC) menée par D coupe la droite (AB) en E et la parallèle à la droite (AB) menée par D coupe la droite (AC) en F. Soit le point G, centre de gravité du triangle ABC et les points H et A', symétriques de G et A par rapport à la droite (BC). On définit les points I et J centres de gravité respectifs des triangles BDE et CDF.

On se propose d'étudier la nature du triangle HIJ quand D décrit le segment [BC].

1.
a) Représenter la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
b) Quelle semble être la nature du triangle HIJ ?
c) Visualiser les lieux des points I et J lorsque le point D décrit le segment [BC].

2. On définit les similitudes directes : S_1, de centre C, de rapport $\sqrt{3}$, d'angle $\frac{\pi}{6}$;
S_2, de centre B, de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$, d'angle $\frac{\pi}{6}$
et leur composée $f = S_2 \circ S_1$.
a) Déterminer les images de J et H par f .
b) Déterminer la nature et des éléments caractéristiques de f .
c) En déduire la nature du triangle HIJ.

Production demandée

- Réalisation de la figure.
- Réponse argumentée à la question 2.

Compétences évaluées

- Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Visualiser un lieu de points et émettre une conjecture sur sa nature.
- Utiliser des notions de géométrie élémentaire dans le plan : centre de gravité, longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral,. . .
- Connaître les propriétés des similitudes (notamment, leurs composées).

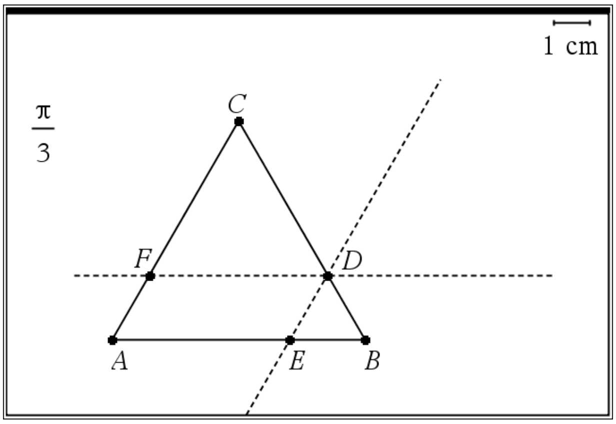
2. Corrigé

1)

a) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**, puis, dans le menu **Affichage**, sélectionner **Afficher Plan géométrique**.
Ajuster le réglage du classeur : menu **Fichier**, **Réglage du classeur**, **Graphiques et géométrie** pour avoir le radian comme mesure des angles géométriques.

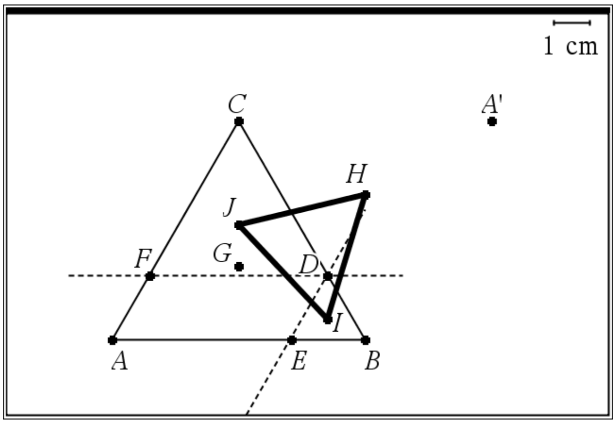
Tracer un segment [AB], saisir sous forme de **Texte** « $\frac{\pi}{3}$ », et construire le point C comme image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; finir le tracé du triangle ABC.

Placer un point D sur le segment [BC] puis construire les points E et F.



Cacher le texte « $\frac{\pi}{3}$ », puis construire, comme intersection de deux médianes, le point G, centre de gravité de ABC.
Construire ensuite les symétriques H et A' de G et A par rapport à la droite (BC), et cacher les éléments de construction.
Construire ensuite les points I et J, centres de gravité des triangles BDE et CDF, comme pour le point G et cacher les éléments de construction.
Tracer alors le triangle HIJ.

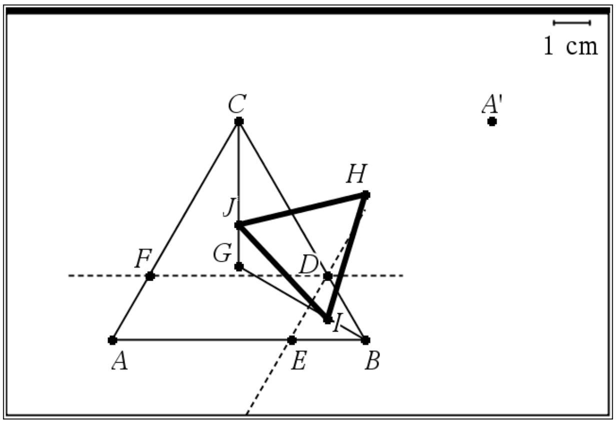
On obtient alors une figure analogue à la copie d'écran ci-contre.



b) Il semble, d'après le dessin, que le triangle HIJ soit équilatéral.

Faire afficher le lieu de I lorsque D décrit le segment [BC], puis de la même façon le lieu de J.

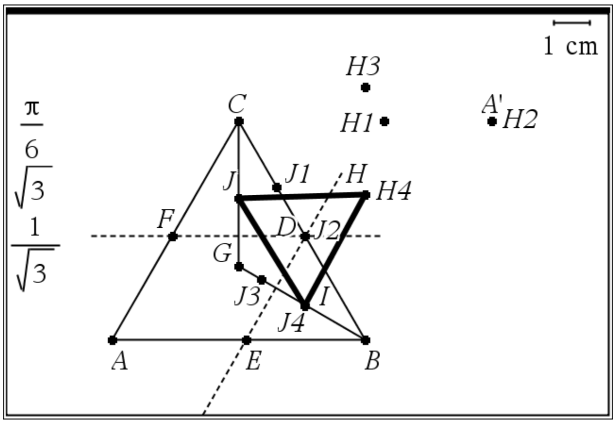
Il semble que, lorsque D décrit le segment [BC], I décrive le segment [BG] et J décrive le segment [CG].
(Si D = B, alors F = A ; E et I sont confondus avec B et J est en G ; si D = C, alors E = A ; Fet J sont confondus avec C et I est en G).



2) a) Saisir sous forme de texte « $\frac{\pi}{6}$ », « $\sqrt{3}$ » et « $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ».

Construire ensuite l'image J_1 de J par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{6}$, puis l'image J_2 de J_1 par l'homothétie de centre C et de rapport $\sqrt{3}$.
On constate que $J_2 = S_1(J) = D$.
Construire ensuite l'image J_3 de $J_2 = D$ par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$, puis l'image J_4 de J_3 par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

On obtient alors l'image de J par f qui est I.



Faire de même pour H. On a $S_1(H) = A'$ et $S_2(A') = H$.
On constate que l'image de H par f est H, ce qui signifie que H est invariant par f.

Utilisons le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(A;\overrightarrow{AB},\vec{v}\right)$ où $\vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et de même norme.
Dans ce repère, A a pour affixe 0 et B a pour affixe 1.
Insérer une page **Calculs**. Définir les variables a et b affixes de A et B ; puis l'affixe c de C image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BC}$, avec $k \in [0\,;\,1]$. On en déduit la définition de l'affixe d de D ci-contre. Faire de même pour E et F.
Définir de la même façon les affixes g, i et j de G, I et J.

$$\begin{array}{ll}
a:=0 & 0 \\
b:=1 & 1 \\
c:=e^{\frac{i\cdot\pi}{3}}\cdot(b-a)+a & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \\
d:=b+k\cdot(c-b) & 1-\frac{k}{2}+\frac{k\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot i \\
e:=b+k\cdot(a-b) & 1-k
\end{array}$$

34/99

$$\begin{array}{ll}
f:=c+(1-k)\cdot(a-c) & \frac{k}{2}+\frac{k\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot i \\
g:=c+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{a+b}{2}-c\right) & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot i \\
i:=d+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{b+e}{2}-d\right) & 1-\frac{k}{2}+\frac{k\cdot\sqrt{3}}{6}\cdot i \\
j:=c+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{d+f}{2}-c\right) & \frac{1}{2}+\frac{(2\cdot k+1)\cdot\sqrt{3}}{\ldots}
\end{array}$$

34/99

$$\begin{array}{ll}
j:=c+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{d+f}{2}-c\right) & \frac{1}{2}+\frac{(2\cdot k+1)\cdot\sqrt{3}}{6}\cdot i \\
h:=x+i\cdot y & x+y\cdot i \\
h-g & x-\frac{1}{2}+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\cdot i \\
c-b & \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i
\end{array}$$

34/99

Définir l'affixe h de H symétrique de G par rapport à [BC] sous la forme $h = x + i\,y$. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{BC}$, puis leur produit scalaire ; calculer ensuite l'affixe du vecteur liant B au milieu de [GH] ; en déduire ensuite les valeurs de x et y en résolvant le système traduisant que le produit scalaire est nul (symétrie axiale) et le fait que $\overrightarrow{BC}$ est colinéaire au vecteur liant B au milieu de [GH] ; redéfinir enfin h avec les valeurs trouvées.
Recommencer l'opération pour déterminer l'affixe $a1$ de A'.

$$\begin{array}{ll}
\text{dotP}\left(\left[x-\frac{1}{2}\quad y-\frac{\sqrt{3}}{6}\right],\left[\frac{-1}{2}\quad\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) & \frac{\sqrt{3}\cdot y}{2}-\frac{x}{2} \\
\frac{g+h}{2}-b & \frac{x}{2}-\frac{3}{4}+\frac{6\cdot y+\sqrt{3}}{12}\cdot i \\
\text{solve}\left(\frac{\sqrt{3}\cdot y}{2}-\frac{x}{2}=0 \text{ and } \frac{-1}{2}\cdot\frac{6\cdot y+\sqrt{3}}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\ldots\right.\right. & \\
 & x=1 \text{ and } y=\frac{\sqrt{3}}{\ldots}
\end{array}$$

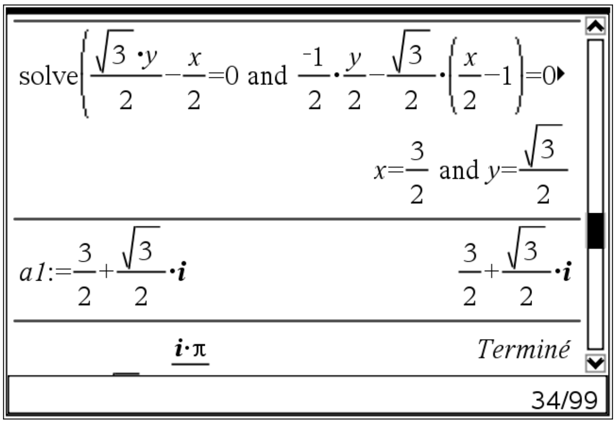
34/99

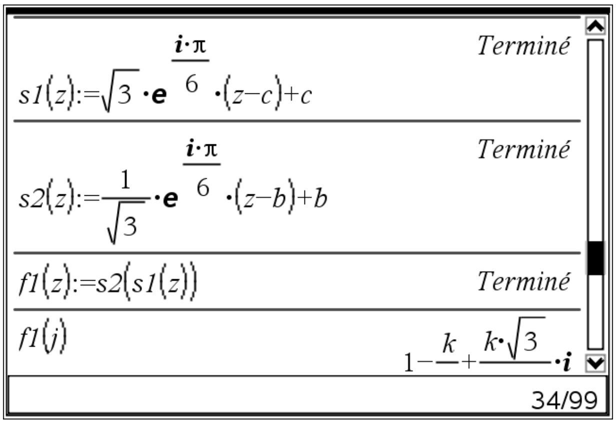
$$\begin{array}{ll}
\text{solve}\left(\frac{\sqrt{3}\cdot y}{2}-\frac{x}{2}=0 \text{ and } \frac{-1}{2}\cdot\frac{6\cdot y+\sqrt{3}}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\ldots\right.\right. & \\
 & x=1 \text{ and } y=\frac{\sqrt{3}}{3} \\
h:=1+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot i & 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot i \\
a1:=x+i\cdot y & x+y\cdot i
\end{array}$$

34/99

$$\begin{array}{ll}
a1-a & x+y\cdot i \\
c-b & \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \\
\text{dotP}\left([x\quad y],\left[\frac{-1}{2}\quad\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) & \frac{\sqrt{3}\cdot y}{2}-\frac{x}{2} \\
\frac{a+a1}{2}-b & \frac{x}{2}-1+\frac{y}{2}\cdot i
\end{array}$$

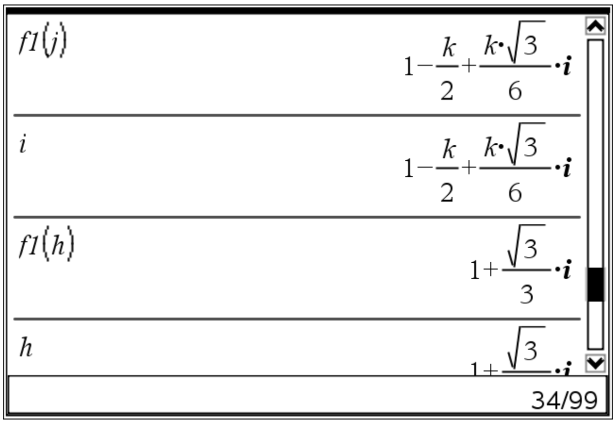
34/99





b) Définir les écritures complexes de similitudes S_1 et S_2, puis leur composée f (nommée ici $f1$ à cause de l'affixe f de F).

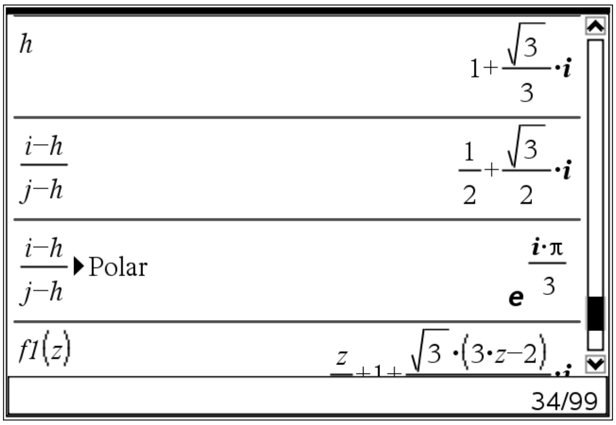
Calculer les images de J et H par f et comparer avec les affixes de I et H.
On constate que $f(\mathrm{J}) = \mathrm{I}$ et que $f(\mathrm{H}) = \mathrm{H}$, ce qui confirme que H est invariant par f.



Calculer ensuite le rapport $\frac{i-h}{j-h}$ et le faire afficher en écriture exponentielle ; il apparaît alors que I est l'image de J par une rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Il semble donc que f soit une rotation.
Pour le confirmer, écrire $f(z)$, puis l'écriture complexe d'une rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{3}$; on constate que les deux résultats sont identiques.

f est donc la rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{3}$.



c) I est l'image de J par la rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{3}$, donc le triangle HJI est un triangle équilatéral direct.