Exercice 1

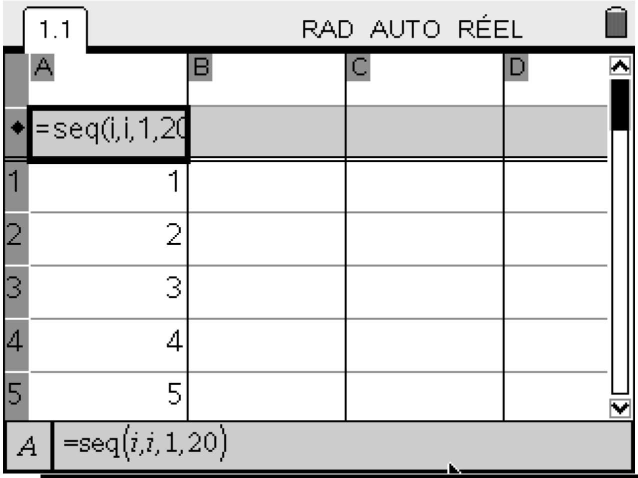
Une suite v est définie par son premier terme v_0 et par la relation de récurrence :
pour tout entier naturel n, $=v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n + 6$

1°) A l'aide de la calculatrice ou du tableur, émettre une conjecture sur la limite l de la suite (v_n), selon les valeurs de v_0.

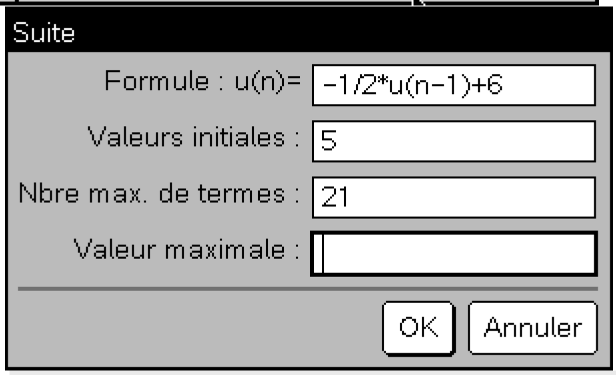
On va utiliser le **tableur** pour afficher les différentes valeurs de la suite.
Il y a plusieurs façons de générer les termes d'une suite dans le tableur :

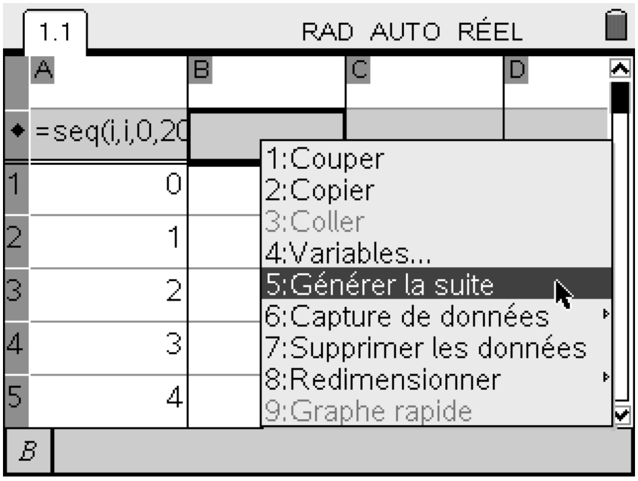
1ère méthode :

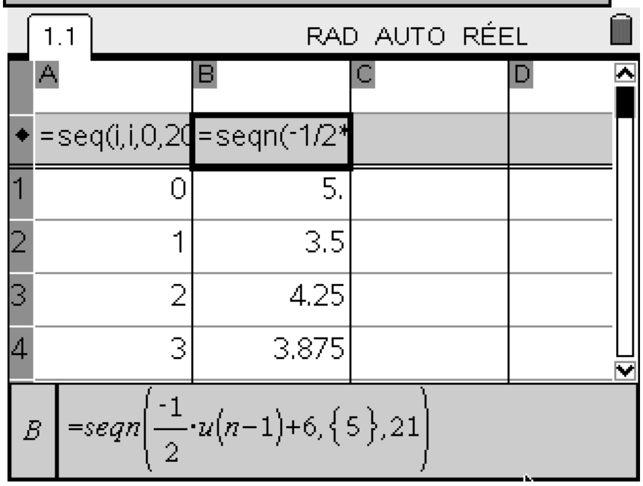
Dans la colonne A cellule grise, on entre =seq(i,i,1,20)



Dans la colonne B, cellule grise, on fait un clique droit « générer la suite »et on complète la boite de dialogue :







Pour différentes valeurs de v_0 on obtient :

	A	B	C
◆	=seq(i,i,0,	=seqn(-1/2	
1	0	-5.	
2	1	8.5	
3	2	1.75	
4	3	5.125	
5	4	3.4375	
6	5	4.28125	
7	6	3.85938	
8	7	4.07031	
9	8	3.96484	
10	9	4.01758	
11	10	3.99121	
12	11	4.00439	
13	12	3.9978	
14	13	4.0011	
15	14	3.99945	
16	15	4.00027	
17	16	3.99986	
18	17	4.00007	
19	18	3.99997	
20	19	4.00002	
21	20	3.99999	
22			

B $=seqn\left(\frac{-1}{2}\cdot u(n-1)+6,\{-5\},21\right)$

	A	B	C
◆	=seq(i,i,0,	=seqn(-1/2	
1	0	5.	
2	1	3.5	
3	2	4.25	
4	3	3.875	
5	4	4.0625	
6	5	3.96875	
7	6	4.01563	
8	7	3.99219	
9	8	4.00391	
10	9	3.99805	
11	10	4.00098	
12	11	3.99951	
13	12	4.00024	
14	13	3.99988	
15	14	4.00006	
16	15	3.99997	
17	16	4.00002	
18	17	3.99999	
19	18	4.	
20	19	4.	
21	20	4.	
22			

B $=seqn\left(\frac{-1}{2}\cdot u(n-1)+6,\{5\},21\right)$

	A	B	C
◆	=seq(i,i,0,	=seqn(-1/2	
1	0	8.	
2	1	2.	
3	2	5.	
4	3	3.5	
5	4	4.25	
6	5	3.875	
7	6	4.0625	
8	7	3.96875	
9	8	4.01563	
10	9	3.99219	
11	10	4.00391	
12	11	3.99805	
13	12	4.00098	
14	13	3.99951	
15	14	4.00024	
16	15	3.99988	
17	16	4.00006	
18	17	3.99997	
19	18	4.00002	
20	19	3.99999	
21	20	4.	
22			

B $=seqn\left(\frac{-1}{2}\cdot u(n-1)+6,\{8\},21\right)$

On peut conjecturer que, quelque soit les valeurs de v_0 on a

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 4$$

2ème méthode :

Dans la cellule $B1$ on entre la valeur de v_0.
Dans la cellule $B2$ on entre la formule de calcul suivante : $= -\frac{1}{2} * B1 + 6$

1.1 RAD AUTO RÉEL

	A	B	C	D
◆	=seq(i,i,0,20			
1	0	5		
2	1	7/2		
3	2			
4	3			

B2 $=\frac{-1}{2}\cdot b1+6$

Astuce : Pour avoir des valeurs approchées (et non pas des fractions) il faut entrer 5. (et non pas 5), sinon on peut changer les réglages de la calculatrice pour avoir des valeurs approchées.

	A	B
◆	=seq(i,i,0,	
1	0	5
2	1	7/2
3	2	17/4
4	3	31/8
5	4	65/16
6	5	127/32
7	6	257/64
8	7	511/128
9	8	1025/256
10	9	2047/512
11	10	4097/10...
12	11	8191/20...
13	12	16385/4...
14	13	32767/8...
15	14	65537/1...
16	15	131071/...
17	16	262145/...
18	17	524287/...
19	18	1048577...
20	19	2097151...
21	20	4194305...

B2 $=\frac{-1}{2}\cdot b1+6$

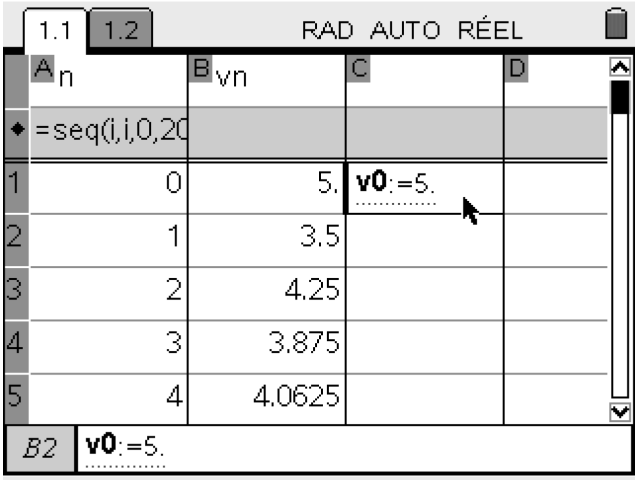
	A	B
◆	=seq(i,i,0,	
1	0	5.
2	1	3.5
3	2	4.25
4	3	3.875
5	4	4.0625
6	5	3.96875
7	6	4.01563
8	7	3.99219
9	8	4.00391
10	9	3.99805
11	10	4.00098
12	11	3.99951
13	12	4.00024
14	13	3.99988
15	14	4.00006
16	15	3.99997
17	16	4.00002
18	17	3.99999
19	18	4.
20	19	4.
21	20	4.

B2 $=\frac{-1}{2}\cdot b1+6$

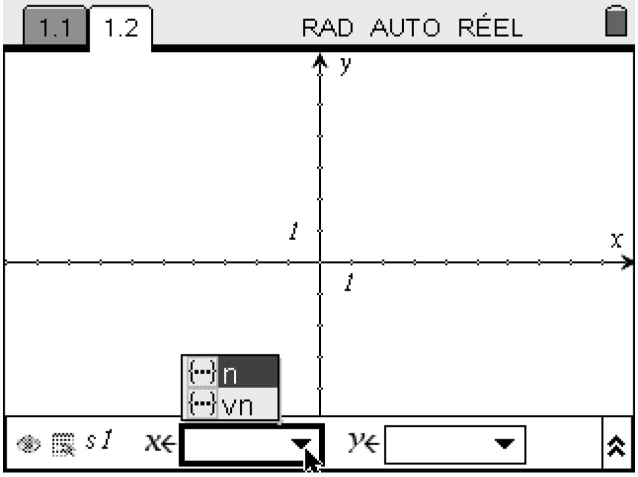
Animation graphique :

Poursuivons la méthode précédente en faisant la représentation graphique des points de coordonnées (n, v_n) puis faisons varier sur le graphique le point de coordonnées $(0, v_0)$:

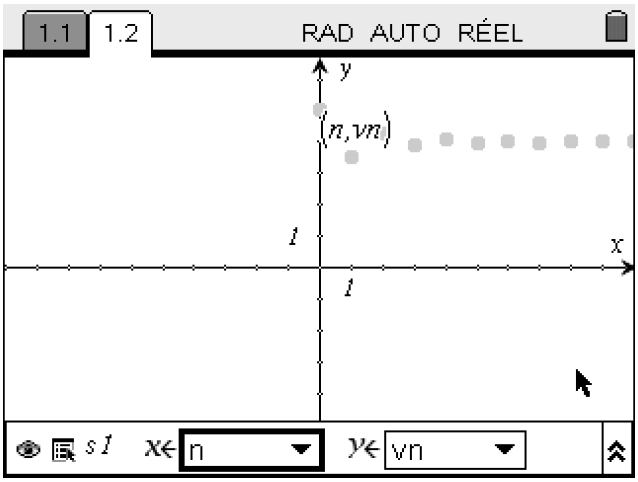
- Entrer la valeur de v_0 dans une autre colonne.
- Faites un clique droit sur cette valeur puis choisir **Variable | Stocker la variable** et choisissez comme nom $\boldsymbol{v_0}$.
- Dans la cellule $B1$ entrer $= C1$
- Nommer la colonne A : $\boldsymbol{n}$
- Nommer la colonne B **:** $\boldsymbol{v_n}$

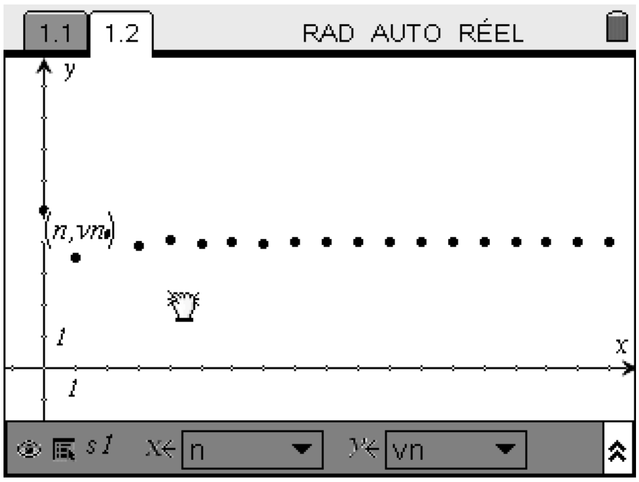


- Ouvrer une page de Graphique et géométrie et appuyer sur : (menu) **Type de graphique | Nuage de points.**
- Pour les abscisses choisir $\boldsymbol{n}$ et pour les ordonnées $\boldsymbol{v_n}$.

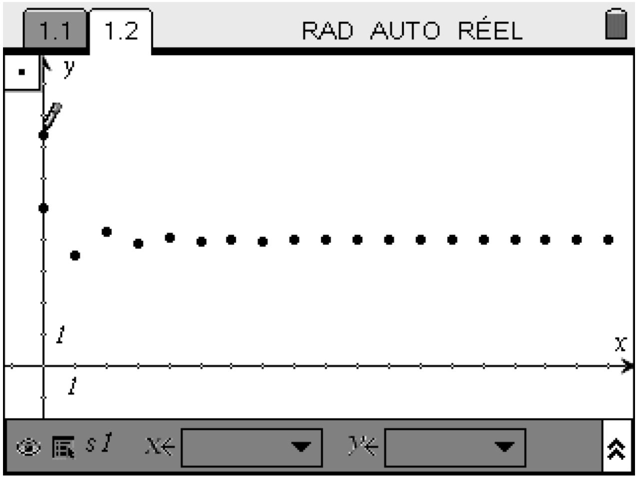


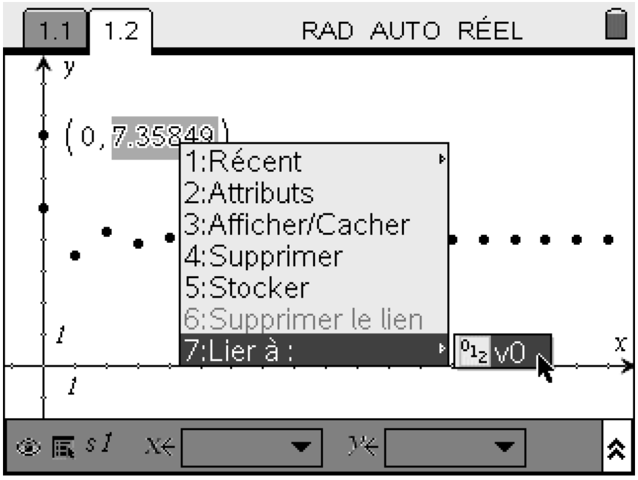
On obtient le graphique suivant ; on peut modifier l'emplacement de l'origine du repère pour visualiser plus de points :



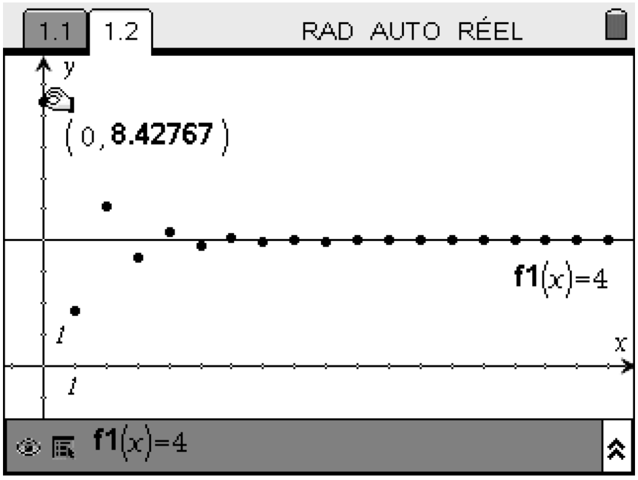


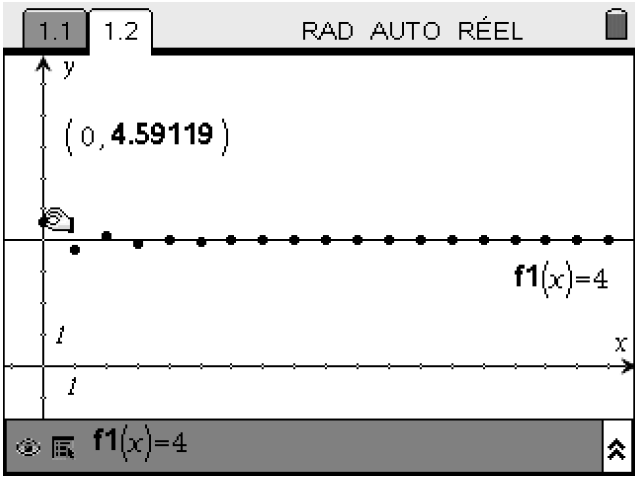
On ne peut pas directement modifier l'ordonnée du point $(0, v_0)$.
On va tout d'abord créer un point sur l'axe des ordonnées, afficher ses coordonnées et lier son ordonnée à la variable v_0 définie précédemment :

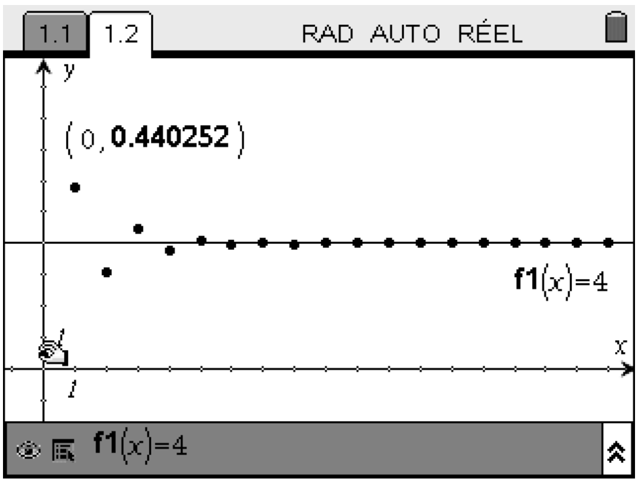


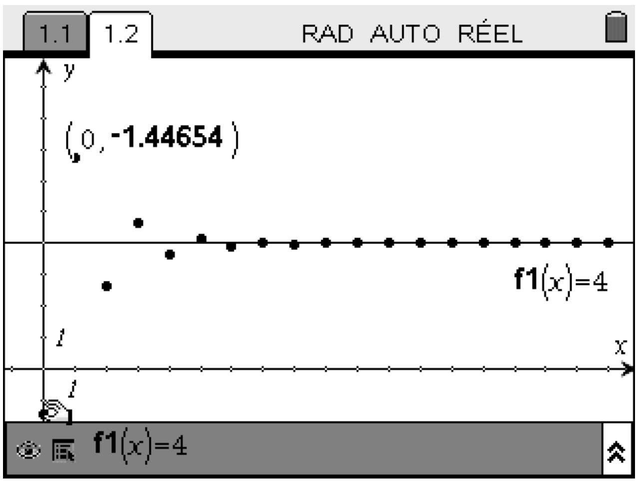


Puisque la suite semble converger vers 4, traçons la droite d'équation $y = 4$ (menu Type de graphique | Fonction).
On peut maintenant déplacer le point $(0, v_0)$:









Il parait clair que la suite (v_n) semble converger vers 4 quelque soit la valeur de v_0

2°) a) La suite (w_n) est définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - l$
Observer à la calculatrice ou au tableur les premiers rangs de la suite (w_n). Quelle semble être la nature de la suite (w_n) ? Est-elle arithmétique ? Géométrique ? Ni arithmétique, ni géométrique ?

On entre comme formule dans la cellule C1 :
$= B1 - 4$
Puis on copie-colle la formule vers le bas en appuyant sur menu **Données | Saisie rapide**

On peut conjecturer que la suite (w) semble être géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

	A n	B vn	C wn
◆			
1	0	-2.	-6.
2	1	7.	3.
3	2	2.5	-1.5
4	3	4.75	0.75
5	4	3.625	-0.375
6	5	4.1875	0.1875
7	6	3.90625	-0.09375
8	7	4.04688	0.046875
9	8	3.97656	-0.023438
10	9	4.01172	0.011719
11	10	3.99414	-0.005859
12	11	4.00293	0.00293
13	12	3.99854	-0.001465
14	13	4.00073	0.000732
15	14	3.99963	-0.000366
16	15	4.00018	0.000183
17	16	3.99991	-0.000092
18	17	4.00005	0.000046
19	18	3.99998	-0.000023
20	19	4.00001	0.000011
21	20	3.99999	-0.000006
C1	=b1-4		

2°) b) Démontrer la propriété conjecturée sur la nature de la suite $(\boldsymbol{w_n})$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $w_{n+1} = v_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}v_n + 6 - 4 = -\frac{1}{2}(w_n + 4) + 2 = -\frac{1}{2}w_n$.

Ce qui prouve que la suite (w_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 4$

2°) c) Exprimer pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{w_n}$ puis $\boldsymbol{v_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

On sait que (w_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 4$, donc d'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $w_n = w_0 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ soit $w_n = (v_0 - 4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = w_n + 4$ donc $v_n = (v_0 - 4)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4$

2°) d) Déterminer la limite de la suite $(\boldsymbol{v_n})$.

D'après le cours si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4$

2°) e) Ce résultat est-il cohérent avec l'expérimentation ?

Oui ce résultat est cohérent avec la conjecture du 1°)