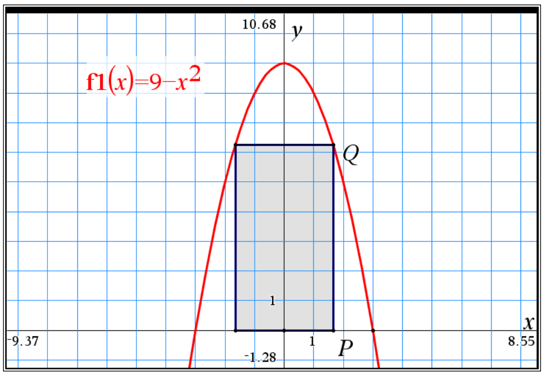
Arean av en viss rektangel

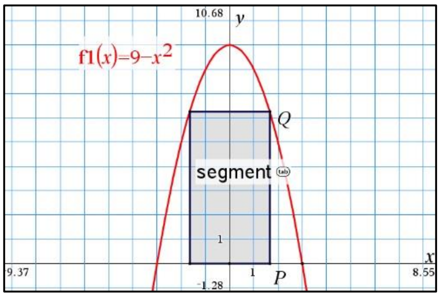
En rektangel har två av sina hörn på kurvan $y = 9 - x^2$ och de övriga på x-axeln. Beroende på läget av hörnen kommer arean av rektangeln att vara olika. Vi ska nu undersöka hur arean varierar och ta reda på när arean är maximal.

Öppna filen *arean av en viss rektangel.tns* där en inledande konstruktion är genomförd. Se bilden!

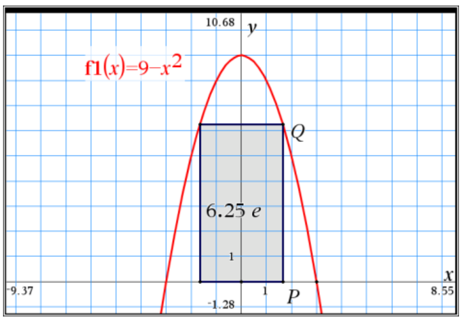


Börja med att dra i punkten *P* och titta på hur rektangeln ändras. Vi har ställt in koordinatsystemet så att en enhet är lika långt på *x*- och *y*-axeln. Det är viktigt om vi ska kunna se en korrekt form på rektangeln.

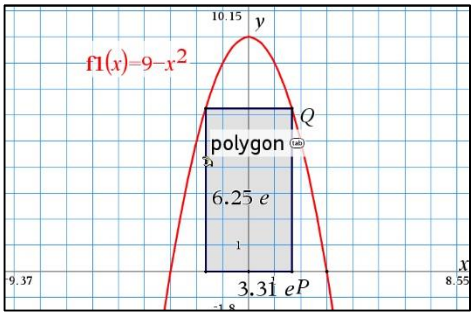
Flytta nu markören till någon av rektangelns sidor. Då dyker texten **Segment** upp. Rektangeln är nämligen konstruerad med ett 4 linjesegment, som finns bland geometriverktygen.



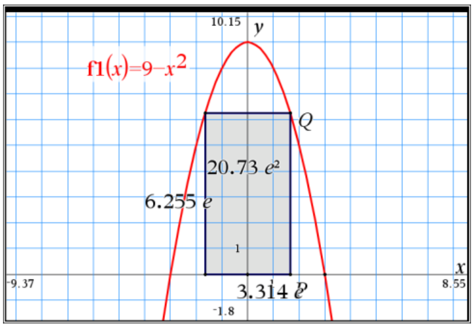
Om du nu högerklickar så dyker en sammanhangsmeny upp. Välj *Mätning* och sedan *Längd* och tryck enter. Nu visas längden på det linjesegment du valde. Här har vi valt rektangelns höjd. Gör likadant med rektangelns bas.



Flytta nu markören till rektangeln en gång till och tryck på *tab*. Nu står det polygon. I den inledande konstruktionen har vi nämligen ritat en fyrhörning utifrån de fyra punkterna i linjesegmenten. Vi har alltså både fyra linjer och en fyr hörning i konstruktionen.

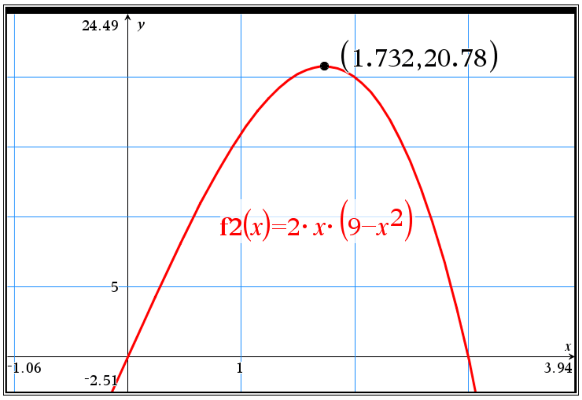


Om du högerklickar och väljer Mätning och se dan area så kan vi nu beräkna rektangelns area. Hur många siffror som visas beror på inställningen. Om du högerklickar på mätetalet kan du under *Attribut* ställa in detta.



Dra nu i punkten *P* och se hur bas, höjd och area varierar. Frågan är nu när arean är som störst. Försök först att ställa in det utifrån konstruk tionen.

Öppna nu en ny grafsida i dokumentet. Arean av rektangeln kan ju tecknas som $2x \cdot (9 - x^2)$. Vi ri tar du denna funktion och bestämmer maxvärdet grafiskt/numeriskt. Vi får värdet 20,78 med fyra värdesiffror.



Vi ska nu bestämma maxvärdet analytiskt med programmets CAS-verktyg.

Öppna en anteckningssida i dokumentet. Där kan man infoga beräkningar från verktygsmenyn.

$f2(x) \blacktriangleright -2\cdot x\cdot (x^2-9)$

När man infogar funktionsuttrycket kanske det skrivs om enligt ovan. Vi matade ju in f2(x) som $2x\cdot(9-x^2)$.

$\frac{d}{dx}(f2(x)) \blacktriangleright 18-6\cdot x^2$

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(f2(x)=0),x\right) \blacktriangleright x=-\sqrt{3} \text{ or } x=\sqrt{3}$ ⚠

$f2(\sqrt{3}) \blacktriangleright 12\cdot\sqrt{3}$

$f2(\sqrt{3}) \blacktriangleright 20.7846$

Vi ska nu också beräkna på höjd/breddförhållandet för rektangeln med maximal area.

$\frac{f1(\sqrt{3})}{2\cdot\sqrt{3}} \blacktriangleright \sqrt{3}$

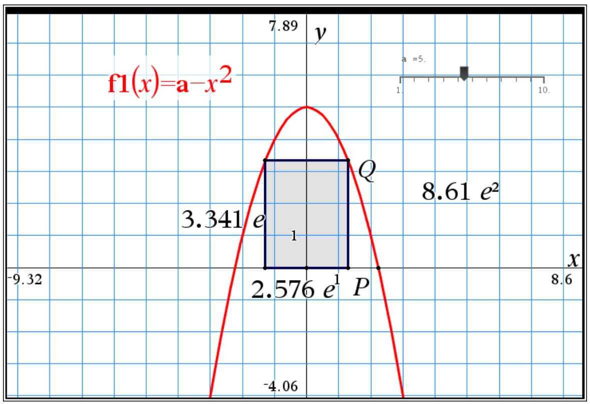
Höjden i rektangeln är alltså $\sqrt{3}$ gånger större än bredden.

Vad gäller för andra funktioner i familjen $y=a-x^2$ där *a* kan anta värden mellan 1 och 10.

Vi infogar nu ett nytt problem i dokumentet och kopierar den första sidan i dokumentet till det nya problemet.

Vi skriver nu om vår funktion som $f1(x)=a-x^2$ och infogar ett skjutreglage där värdet på *a* kan varieras. Nu blir det något svårare! Vi kan både variera läget på punkten *P* och ändra värdet på parametern *a*.

Det är klart att rektangelns area blir mindre när *a* minskar eftersom den tillgängliga arean under kurvan är mindre. Det här måste vi undersöka analytiskt.



Vi döper vår parameter för *a1* eftersom parametern *a* används på sid 1 i detta problem och då har *a* ett visst numeriskt värde som beror av läget på skjutreglaget.

Nedan syns alla beräkningar som behövs för att beräkna den maximala arean. Vi får ett ganska komplicerat uttryck för arean.

Arean av rektangeln är $2\cdot x\cdot(a1-x^2)$. Vi deriverar nu med avseende på x. $\frac{d}{dx}\left(2\cdot x\cdot(a1-x^2)\right) \blacktriangleright 2\cdot a1-6\cdot x^2$

Vi löser sedan ekvationen när derivatan = 0.

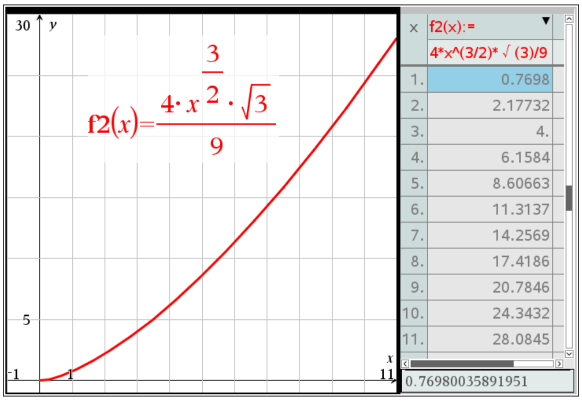
$\text{solve}(2\cdot a1-6\cdot x^2=0,x)$

$\blacktriangleright x=\frac{\sqrt{3\cdot a1}}{3} \text{ and } a1\geq 0 \text{ or } x=\frac{-\sqrt{3\cdot a1}}{3} \text{ and } a1\geq 0$

Den maximala arean blir då

$2\cdot x\cdot(a1-x^2)|x=\frac{\sqrt{3\cdot a1}}{3} \blacktriangleright \frac{4\cdot a1^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{3}}{9}$ ⚠

Vi kan nu rita hur arean beror av parametern *a*. Vi infogar en grafsida för att se detta beroende.



Vi ser nu hur maxarean av rektangeln beror av parametern *a* i funktionsuttrycket. Titta på värdet för 9. Det stämmer med föregående beräkningar.

Frågan är nu om det finns något värde på *a* som gör att formen på rektangeln när den är maxi mal är *kvadratisk*. Vi måste då teckna ett uttryck för *förhållandet* höjd/bredd. Vi beräknade tidi gare värdet på *x* uttryckt i parametern *a* när derivatan var 0. Vi fick $\sqrt{3a1}/3$.

Här tecknar vi förhållandet höjd/bredd med värdet på *x* insatt i uttrycket. Uttrycket förenklas.

$\left(a1-\left(\frac{\sqrt{3\cdot a1}}{3}\right)^2\right)/\left(2\cdot\frac{\sqrt{3\cdot a1}}{3}\right) \blacktriangleright \frac{\sqrt{3\cdot a1}}{3}$ ⚠

Nu löser vi ekvationen för *a1* när förhållandet är 1

$\text{solve}\left(\frac{\sqrt{3\cdot a1}}{3}=1,a1\right) \blacktriangleright a1=3$

Vi får värdet 3 på parametern. Nu tittat vi återigen på vår funktion och ställer in värdet till 3. Precisionen i värdet när man drar i punkten *P* gör att man inte kan få exakta värden.