Matrices et suites

TI-Nspire™ CAS

La guerre des pucerons

Modèle proie – prédateur discrétisé

Les maraîchers de la région de Mauguio (Hérault), comme dans d'autres lieux, ont depuis longtemps à faire face aux invasions de pucerons, dévastateurs des cultures sous serre et plus particulièrement dans cette région celle des concombres, courgettes et tomates. L'utilisation de nombreux insecticides s'est révélée porteuse de risques pour la santé des consommateurs et nuit à l'image de marque des producteurs. Le choix d'insecticides « bio » a permis de palier cette difficulté mais son coût demeure élevé et toute maladresse dans l'anticipation des facteurs susceptibles de relancer le développement des pucerons peut s'avérer fatale. Plusieurs de ces maraîchers font le choix depuis quelques années d'introduire des coccinelles[1] pour leur rôle de prédation exclusive des pucerons. Cette démarche se fait de façon expérimentale et des modèles sont à l'étude dans certains Instituts de la Recherche Agronomique afin d'optimiser la méthode.

Ce problème propose la mise en place d'un modèle de type proie-prédateur qui décrit l'évolution des deux populations pucerons et coccinelles. Une exploitation en sera faite grâce à la simulation du modèle sur tableur.

Partie 1 Élaboration d'un modèle d'évolution

L'évolution des deux populations, pucerons et coccinelles, sera décrite par deux suites (p_n) et (c_n) où p_n et c_n désignent respectivement les nombres de pucerons et de coccinelles en vie au $n^{\text{ème}}$ jour de l'étude expérimentale.

• De la formulation de quelques propositions…

Deux paramètres influent sur l'effectif des deux populations : les taux de natalité et de mortalité par jour de chacune des deux espèces ; plus précisément, l'accroissement relatif quotidien de chaque population est la différence de leurs taux de natalité et mortalité (proposition 1).

On note : tnC(n) le taux de natalité des coccinelles au $n^{\text{ème}}$ jour,
tnP(n) le taux de natalité des pucerons " ,
tmC(n) le taux de mortalité des coccinelles " ,
tmP(n) le taux de mortalité des pucerons " .

- Les coccinelles ont besoin d'une grande quantité de pucerons pour que leur développement leur permette de se reproduire et l'on constate que leur taux de natalité est lié à l'effectif des pucerons présents (proposition 2).

En l'absence de prédateurs (ce qui est pratiquement le cas dans les cultures sous serre), le taux de mortalité des coccinelles est une donnée intrinsèque de l'espèce (proposition 3) ; on ne confondra pas cette information avec la dépendance évidente entre une raréfaction des pucerons et la variation à court terme de l'effectif de coccinelles.

- Dans un milieu végétal où leur alimentation est garantie (condition satisfaite dans les serres en service), le taux de natalité des pucerons est une donnée intrinsèque de l'espèce (proposition 4).

Les pucerons sont goulument dévorés par les coccinelles : ces dernières ne leur laissent aucune chance de mourir de vieillesse, ce qui signifie que le taux de mortalité des pucerons se réduit quasiment au taux de prédation des pucerons par les coccinelles ; il apparait de plus que ce taux de prédation des pucerons est lié à l'effectif des coccinelles présentes (proposition 5).

[1] La coccinelle *Harmonia axydiris* se montre extrêmement polyphage contre le puceron *Aphis gossypii* présent sur ce type de cultures.

• … à un choix d'hypothèses *à émettre* ***en s'appuyant sur les propositions précédentes***

1. Évolution du nombre de coccinelles

a. Émettre une hypothèse (H1) sur le taux de mortalité des coccinelles.

b. Émettre une hypothèse (H2) sur le taux de natalité des coccinelles et la traduire par une relation entre tnC(n) et p_n.

c. Montrer que la relation $c_{n+1} = c_n - \alpha\, c_n + \beta\, p_n\, c_n$, où α et β désignent des nombres réels, correspond à un choix recevable d'hypothèses émises aux questions **a** et **b**.

2. Évolution du nombre de pucerons

a. Émettre une hypothèse (H3) sur le taux de natalité des pucerons.

b. Émettre une hypothèse (H4) sur la relation liant le taux de mortalité des pucerons à l'effectif des coccinelles : on exprimera tmP(n) en fonction de c_n.

c. En utilisant les hypothèses précédentes, établir une relation entre p_{n+1} , p_n et c_n.

• Le modèle

Le modèle retenu pour décrire l'évolution des pucerons et coccinelles se traduit par le système suivant :

$$(S)\ \begin{cases} c_{n+1} = c_n(1-\alpha+\beta\ p_n) \\ p_{n+1} = p_n(1+\delta-\gamma\ c_n) \end{cases} \quad \text{où } \alpha, \beta, \gamma, \delta \ \text{ sont des paramètres réels positifs,}$$

avec les conditions initiales fournies par les nombres c_0 et p_0 de coccinelles et pucerons au jour 0.

Partie 2 Mise en œuvre du modèle : tableur et graphiques

1. Les taux de mortalité des coccinelles (paramètre α) et de natalité des pucerons (paramètre δ) ont été évalués en laboratoires ; des intervalles de valeurs ont été obtenus pour chacun d'eux ; dans cette question on retiendra $\alpha = 0{,}03$ et $\delta = 0{,}05$.

Dans une serre de production de concombres contrôlée en laboratoire, le nombre de pucerons au jour 0 de l'expérimentation est estimé à 2 300 ; on introduit 25 coccinelles. Deux jours plus tard (jour 2), le nombre de coccinelles a doublé et celui des pucerons est estimé à 2 380.

a. En admettant que l'évolution des deux populations suive le modèle défini dans la **partie 1**, calculer les paramètres β et γ : on utilisera un logiciel de calcul formel.

b. On fixe $\beta = 2.10^{-4}$ et $\gamma = 10^{-3}$. À l'aide d'un tableur et de graphiques, étudier et décrire l'évolution en fonction du temps de chacune des deux populations sur les 30 premiers jours.

2. Dans le tableur réalisé à la question précédente, les nombres initiaux de pucerons et coccinelles peuvent être modifiés en agissant directement sur une cellule.

a. Adapter ce tableur de façon à pouvoir agir également sur les valeurs des paramètres α, β, γ, δ dans les intervalles estimés en laboratoire : [0,01 ; 0,1] pour α et δ, $[10^{-5}\ ;\ 5.\ 10^{-3}]$ pour β et γ ; l'utilisation de curseurs est recommandée. En relation dynamique avec ce tableur, construire les nuages de points (j_n ; p_n) et (j_n ; c_n) où j_n est le $n^{\text{ème}}$ jour de l'étude expérimentale. Selon les besoins de l'observation, on conduira l'étude sur 90 ou 180 jours.

b. En jouant sur les paramètres α, β, γ, δ ainsi que sur les nombres initiaux c_0 et p_0 de coccinelles et pucerons, observer et décrire différents comportements de l'évolution conjointe des deux populations.

3. Le diagramme donné en annexe présente le nuage de points reliés (p_n ; c_n) sur les 180 premiers jours, à partir de $p_0 = 2\ 300$ et $c_0 = 200$ pour les valeurs des paramètres : $\alpha = 0{,}055$, $\beta = 4.\ 10^{-5}$, $\gamma = 2.\ 10^{-4}$ et $\delta = 0{,}07$.

a. Reconnaître et noter sur ce graphique les phases correspondant aux différents *sens de variation* des effectifs des deux populations.

b. Réaliser sur un même graphique les nuages de points (j_n ; p_n) et (j_n ; c_n) avec $n \in [0\ ;\ 180]$ pour les mêmes valeurs des paramètres et retrouver sur ce graphique les phases mentionnées dans la question précédente.

c. En s'appuyant sur les graphiques des questions **a** et **b**, commenter l'évolution conjointe des pucerons et coccinelles dans cette situation ; par anticipation sur les mois suivants et en admettant que les conditions n'altèrent pas (ou peu) le modèle choisi, proposer une description possible de l'évolution à venir.

Partie 3 Étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre

1. Recherche d'un équilibre

La variété des situations d'évolution observée précédemment amène la question suivante : existe-t-il un « point d'équilibre », c'est-à-dire un couple (c^* ; p^*) de valeurs initiales pour lequel les suites (c_n) et (p_n) sont stationnaires ?
Montrer qu'il existe un unique point d'équilibre autre que la solution triviale (0 ; 0) : exprimer c^* et p^* en fonction des paramètres α, β, γ, δ.
Calculer c^* et p^* pour les valeurs suivantes des paramètres : $\alpha = 0{,}08$, $\beta = 10^{-4}$, $\gamma = 10^{-3}$ et $\delta = 0{,}05$. Contrôler les résultats sur le tableur ou le graphique réalisés dans la **Partie 2**.

2. Linéarisation autour du point d'équilibre (c^* ; p^*)

On se place au voisinage du point d'équilibre en posant $\begin{cases} C_n = c_n - c^* \\ P_n = p_n - p^* \end{cases}$ où c_n et p_n vérifient le système (S) mis en place dans la **Partie 1**.

a. Montrer que pour tout entier naturel n : $\begin{cases} C_{n+1} = C_n + \dfrac{\beta\,\delta}{\gamma} P_n + \beta\, C_n\, P_n \\ P_{n+1} = P_n - \dfrac{\alpha\,\gamma}{\beta} C_n - \gamma\, C_n\, P_n \end{cases}$ système (S1).

Lorsque les couples (c_n ; p_n) sont proches du point d'équilibre (c^* ; p^*), C_n et P_n sont proches de 0 et le produit $C_n\,P_n$ est négligeable par rapport aux autres termes du système (S1). Les solutions du système (S1) sont alors *approchées* par celles du système (S2) $\begin{cases} C_{n+1} = C_n + \dfrac{\beta\,\delta}{\gamma} P_n \\ P_{n+1} = P_n - \dfrac{\alpha\,\gamma}{\beta} C_n \end{cases}$.

b. Montrer que (S2) se traduit en termes matriciels par $\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ P_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} C_n \\ P_n \end{pmatrix}$ où M est une matrice que l'on précisera ; exprimer par récurrence $\begin{pmatrix} C_n \\ P_n \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} C_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$ et de la matrice M.

c. S'il est relativement facile d'introduire un nombre précis de coccinelles dans une serre donnée, l'évaluation du nombre de pucerons *présents* ne peut être qu'approximative. Dans cette question, on prendra pour valeurs initiales $c_0 = c^*$ et p_0 égal à un entier s'écartant de p^* d'au plus 20 %.
A l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, calculer pour différentes valeurs de p_0 les termes des suites (C_n) et (P_n) au cours de 365 jours consécutifs. Construire le nuage de points (C_n ; P_n) correspondant. Interpréter les affichages obtenus (on suppose que la mise en cultures de la serre fournit les conditions permettant le maintien du taux de natalité des pucerons au cours de la période considérée).
Que se passe-t-il si l'on modifie (légèrement) les valeurs des paramètres α, β, γ, δ ?

Annexe

Nuage de points reliés (p_n ; c_n) sur les 180 premiers jours, à partir de $p_0 = 2\,300$ et $c_0 = 200$ pour les valeurs des paramètres : $\alpha = 0{,}055$, $\beta = 4.10^{-5}$, $\gamma = 2.10^{-4}$ et $\delta = 0{,}07$.