Auteur : Jacques Salles

Matrices et suites

TI-Nspire™ CAS

La guerre des pucerons

Modèle proie – prédateur discrétisé

Objectifs et intentions

Résumé

Il s'agit d'étudier l'évolution couplée de deux suites récurrentes puis d'aborder le problème linéarisé au voisinage d'un point d'équilibre.
Cette activité amène les élèves à modéliser, à partir d'un choix d'hypothèses proposé, une situation concrète d'évolution d'un système proies – prédateurs (ici coccinelles – pucerons) ; des choix de valeurs particulières de certains paramètres conduisent à observer des évolutions conjointes très différentes. Un point d'équilibre est détecté ; le problème linéarisé au voisinage de ce point amène à introduire des matrices, à effectuer des calculs en algèbre linéaire donnant un nouveau point de vue sur le modèle d'évolution proposé.

Commentaires

Le modèle proie-prédateur de Volterra, dans sa version discrétisée, fournit ici un exemple de suites liées par une relation non linéaire dont l'étude met en œuvre tour à tour calcul formel, tableur et graphiques, où l'utilisation d'un logiciel multi représentations tel que TI-Nspire CAS se révèle particulièrement pertinente. La recherche d'une trajectoire stationnaire conduit à linéariser le problème au voisinage du point d'équilibre ; l'introduction de matrices donne alors un nouveau point de vue dans l'étude de la situation, apportant à la fois simplification d'écriture et efficacité de traitement.
Dans la première partie le choix a été fait de ne pas fournir *ex abrupto* le modèle d'évolution concerné par les populations de pucerons et coccinelles, mais d'engager les élèves à le mettre en place pas à pas : à partir de cinq propositions *raisonnables* que l'on est implicitement amené à adopter comme de possibles observations de terrain (point de vue de l'expérimentateur), les élèves sont conduits à formuler des hypothèses sur les taux de natalité et mortalité des deux espèces. Deux d'entre elles sont des traductions directes de propositions de l'énoncé (n° 3 et 4) ; pour les deux autres, les propositions de l'énoncé concernées indiquent qu'un taux est *lié* à l'effectif d'une population, mais le modèle fonctionnel susceptible d'exprimer ce lien n'est pas fourni. Les élèves auront à exprimer le taux de natalité des coccinelles, tnC(n), en fonction de l'effectif des pucerons, p_n (question **1b**) puis le taux de mortalité des pucerons, tmP(n), en fonction de l'effectif des coccinelles, c_n (question **2b**). L'initiative d'un choix de fonction leur revient. Le modèle linéaire est celui attendu (dans cette version du problème) ; d'autres, plus sophistiqués, sont peut-être recevables mais ne pourront être justifiés par les seules données de l'énoncé. La relation fournie à la question **1c** permet, *a posteriori*, de valider le choix du modèle fonctionnel effectué en **1b** ou le cas échéant de revenir sur son choix. Cette première partie se termine par la donnée du système dynamique proie-prédateur de Volterra discrétisé, adapté à la situation proposée : les élèves y trouveront la confirmation de leurs précédents résultats ou à défaut une base de travail sûre pour les parties suivantes.
La deuxième partie propose une mise œuvre du modèle établi auparavant à l'aide d'un tableur et de graphiques. La première question amène, à partir d'un relevé expérimental, à calculer deux des paramètres introduits pour la mise en place du modèle. La deuxième question conduit à observer et décrire différents comportements d'évolution suivants les valeurs des paramètres ou de l'effectif initial de chacune des populations. La troisième propose en annexe un diagramme d'un type sans doute nouveau pour la plupart des élèves : il s'agit de la trajectoire d'évolution des deux populations proies – prédateurs. Les élèves doivent apprendre à lire un tel graphique et expliciter les informations qui s'en dégagent ; le lien avec les nuages de points rencontrés aux questions précédentes est enfin proposé et la cohérence des observations doit être établie.
La troisième partie débute par la recherche d'un point d'équilibre ; un changement de variables permet de se placer au voisinage de ce point ; un nouveau système de suites récurrentes est mis en place et trouve une écriture matricielle dont les élèves découvriront la simplicité ; le professeur pourra les amener à apprécier l'efficacité de traitement que l'algèbre linéaire apporte aux calculs à effectuer.

Partie 1 Élaboration d'un modèle d'évolution

La discrétisation du modèle d'évolution proposé apparait avec la mise en place des suites des effectifs quotidiens (p_n) et (c_n). La phrase « deux paramètres influent sur l'effectif des deux populations : les taux de natalité et de mortalité par jour de chacune des deux espèces ; plus précisément, l'accroissement relatif quotidien de chaque population est la différence de leurs taux de natalité et mortalité (proposition 1) » rend compte de la mathématisation de la situation : il s'agit d'exprimer, pour les coccinelles, que $\dfrac{c_{n+1}-c_n}{c_n} = \text{tnC}(n) - \text{tmC}(n)$ ainsi qu'une relation analogue pour les pucerons.

1. a. La proposition 3 exprime que le taux de mortalité des coccinelles tmC(n) est constant (notons le α).

H1 pour tout entier naturel n, $\text{tmC}(n) = \text{tmC}(0) = \alpha$.

1. b. D'après la proposition 2, le taux de natalité des coccinelles tnC(n) est *lié* à l'effectif p_n des pucerons, mais la nature du lien n'est pas précisée. Bien des modèles peuvent être envisagés, mais en l'absence de plus ample information il peut être raisonnable de s'en tenir à une relation linéaire :

H2 pour tout entier naturel n, $\text{tnC}(n) = \beta\, p_n$ où β est une constante positive.

1. c. On a vu que, pour tout entier naturel n, tant que la population de coccinelles ne s'éteint pas ($\neq 0$) :

$\dfrac{c_{n+1}-c_n}{c_n} = \text{tnC}(n) - \text{tmC}(n)$ (proposition 1) ; il en résulte, d'après les questions précédentes :

$\dfrac{c_{n+1}-c_n}{c_n} = \beta\, p_n - \alpha$ et donc, $\boxed{c_{n+1} = c_n - \alpha\, c_n + \beta\, p_n c_n}$ ou $c_{n+1} = c_n(1 - \alpha + \beta\, p_n)$.

2. a. La proposition 4 indique que le taux de natalité des pucerons tnP(n) est une constante δ.

H3 pour tout entier naturel n, $\text{tnP}(n) = \text{tnP}(0) = \delta$.

2. b. La proposition 5 apprend d'une part que le taux de mortalité des pucerons est égal au taux de prédation des pucerons par les coccinelles et d'autre part que ce dernier taux est *lié* à l'effectif c_n des coccinelles ; formulons l'hypothèse que ce lien est de nature linéaire :

H4 pour tout entier naturel n, $\text{tmP}(n) = \gamma\, c_n$ où γ est une constante positive.

2. c. Comme à la question **1c**, tant que la population de pucerons ne s'éteint pas ($p_n \neq 0$) :

$\dfrac{p_{n+1}-p_n}{p_n} = \text{tnP}(n) - \text{tmP}(n)$; on en déduit, à l'aide des questions **2a** et **2b** :

$\dfrac{p_{n+1}-p_n}{p_n} = \delta - \gamma\, c_n$ et donc, $\boxed{p_{n+1} = p_n + \delta\, p_n - \gamma\, p_n c_n}$ ou $p_{n+1} = p_n(1 + \delta - \gamma\, c_n)$.

Partie 2 Mise en œuvre du modèle : tableur et graphiques

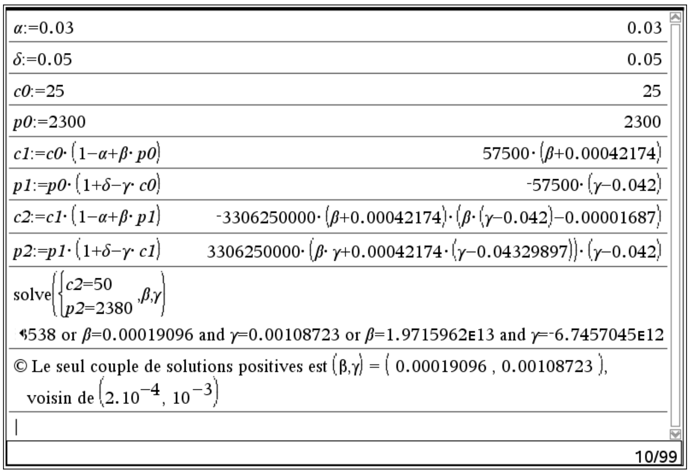
1. a. On ouvre une page **Calculs** dans l'activité 1 d'un nouveau classeur.

On définit les valeurs de α, δ, c_0 et p_0 puis on entre les formules permettant de calculer c_1, p_1 et c_2, p_2.

Il reste alors à résoudre le système :

$\begin{cases} c_2 = 50 \\ p_2 = 2\,380 \end{cases}$ où les inconnues sont β et γ.

On ne retient bien sûr que les solutions pour lesquelles β et γ sont positifs : une seule solution apparaît, sous la forme d'une valeur approchée.



1. b. On poursuit, dans la page Calculs, en définissant les valeurs de β et γ puis on ouvre une page **Tableur**.

- En colonne A on crée la liste des jours (entiers consécutifs de 0 à 30).

- En colonne B on définit la suite (c_n) des effectifs quotidiens de coccinelles avec l'initialisation en cellule b1 : b1 = 25 et en cellule b2 la formule b2 = int(b1*(1-α+β*c1)) étendue à la plage b3: b30.

On notera le recours à la fonction partie entière (int) conforme à la nature entière des effectifs attendus !

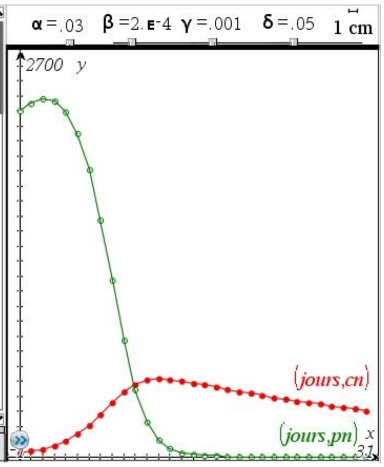
- En colonne C on définit de même la suite (p_n) des effectifs quotidiens de pucerons avec l'initialisation : c1 = 2300 et la formule c2 = int(c1*(1+δ-γ*b1)) étendue elle aussi à la plage c3: c30.

Partageons alors la page courante en ouvrant une fenêtre comportant l'application **Graphiques** ; on demande l'affichage de deux nuages de points (*jours* ; *cn*) pour les coccinelles et (*jours* ; *pn*) pour les pucerons.

Une lecture conjointe du graphique, pour une vision globale, et du tableur, pour des données numériques plus précises, permet d'observer que la population des pucerons s'accroît légèrement pendant les deux premiers jours, tant que l'effectif des coccinelles reste réduit, puis chute brutalement tandis que la population des coccinelles connaît une phase de croissance (les 12 premiers jours) suivie d'une réduction inexorable.

	A jours	B cn	C pn
◆			
1	0	25	2300
2	1	35.	2351.
3	2	50.	2378.
4	3	72.	2366.
5	4	103.	2296.
6	5	147.	2150.
7	6	205.	1909.
8	7	277.	1573.
9	8	355.	1172.
10	9	427.	772.
11	10	480.	447.

C3 =int(c2·(1+δ−γ·b2))



Parmi les interrogations que ces observations peuvent susciter, on peut citer un curieux comportement : à partir du quinzième jour, l'effectif des pucerons devient ridiculement faible au regard de celui des coccinelles, pour tomber définitivement à 0 au vingtième jour ; pourquoi n'assiste-t-on pas alors à l'anéantissement de la population des coccinelles ? On peut avancer diverses hypothèses, par exemple le fait que les effectifs quotidiens calculés sont le résultat des naissances et des disparitions par prédation : chaque jour des pontes et des éclosions de pucerons peuvent avoir lieu avant que tous ne soient dévorés, et ainsi de suite tant qu'il reste des coccinelles. De façon générale, face à d'apparentes contradictions, il conviendra de veiller à laisser la possibilité d'explications non évidentes tout en ayant conscience que les modèles d'évolution choisis s'appuient sur des hypothèses qui peuvent être remises en cause à tout moment ou des simplifications qui gagneraient à être affinées.

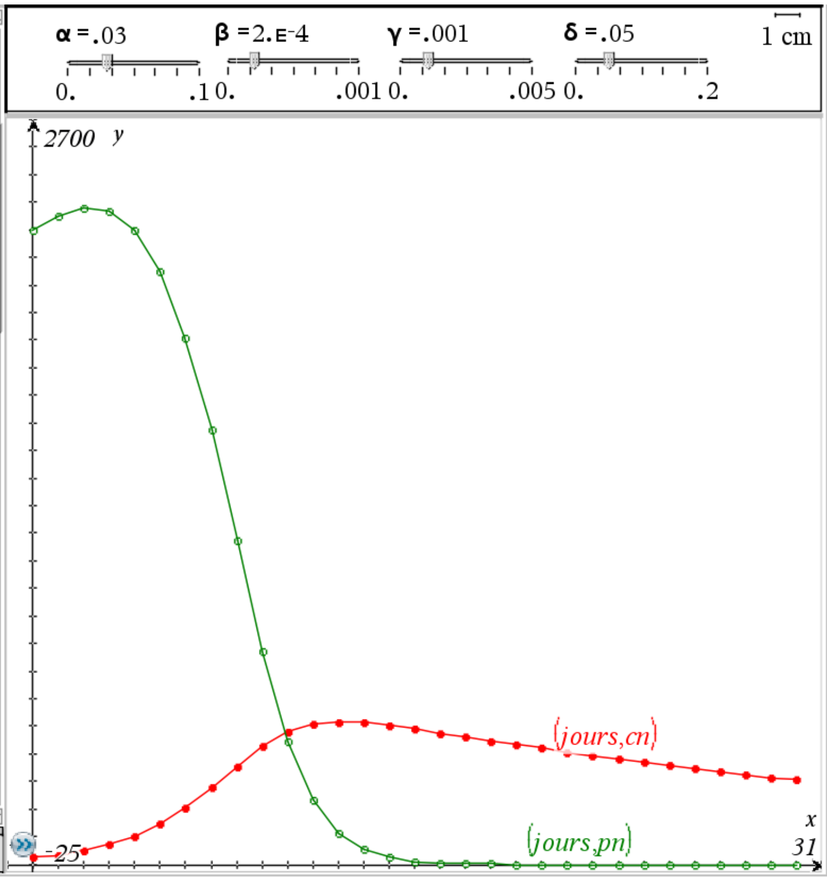
2. a. Comme le suggère l'énoncé, on crée un curseur pour chacune des variables α, β, γ, δ, en tenant compte des intervalles de définition de chacune d'elles ; pour commencer, l'initialisation de ces variables peut être choisie aux valeurs proposées dans la question 1 précédente (voir l'écran page suivante).

Remarque d'ordre technique liée au logiciel TI-Nspire : dans l'activité 1 du classeur créé pour l'étude de ce problème, les variables α, β, γ, δ, ont été définies dans l'application Calculs ; les valeurs affectées le restent dans toutes les pages d'une même activité, sauf si elles sont supprimées (commande DelVar).

On peut donc
- soit supprimer les variables α, β, γ, δ dans la page Calculs, puis créer les curseurs dans la page graphique en désignant évidemment par α, β, γ, δ la variable de chacun de ces curseurs,
- soit créer une nouvelle activité dans laquelle on copie la page 1.2 de l'activité 1 (afin d'éviter de tout recommencer) ; la page 2.1 est alors une copie de la page 1.2 ; il reste là encore à créer les différents curseurs. Ce dernier choix est celui adopté dans le fichier TI-N*spire* joint (*LaGuerreDesPucerons_prof.tns*) : cela permet de conserver une trace des travaux effectués au cours des questions précédentes.

	A jours	B cn	C pn	D
◆				
8	7	277.	1573.	
9	8	355.	1172.	
10	9	427.	772.	
11	10	480.	447.	
12	11	508.	233.	
13	12	516.	114.	
14	13	512.	54.	
15	14	502.	26.	
16	15	489.	12.	
17	16	475.	6.	
18	17	461.	3.	
19	18	447.	1.	
20	19	433.	0.	
21	20	420.	0.	
22	21	407.	0.	
23	22	394.	0.	
24	23	382.	0.	

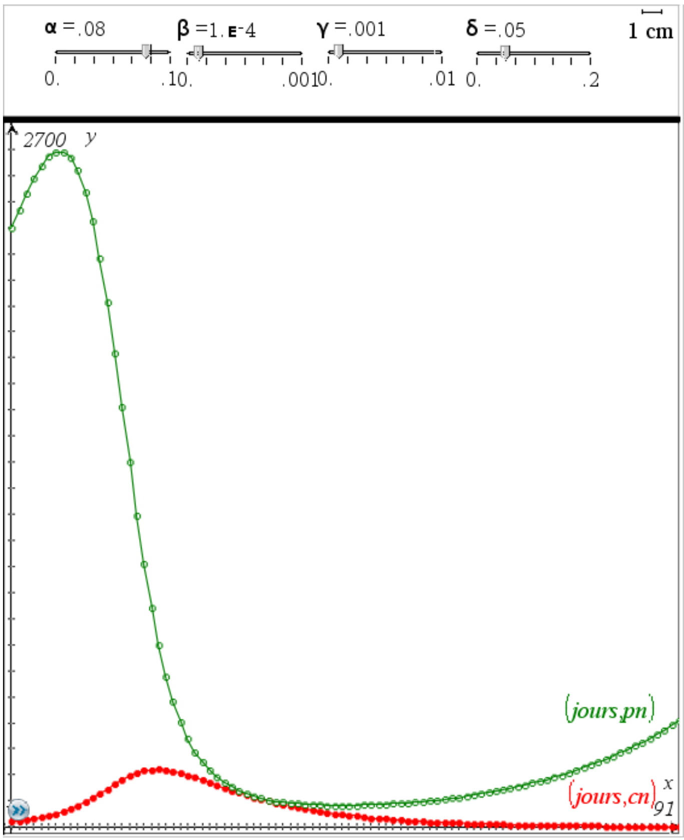
C9 $=\text{int}(c8\cdot(1+\delta-\gamma\cdot b8))$



2. b. D'autres valeurs des nombres initiaux c_0 et p_0 de coccinelles et pucerons ainsi que des paramètres α, β, γ, δ conduisent à des comportements différents de l'évolution conjointe des deux populations.

- Sans changer le nombre initial de pucerons mais avec un nombre initial de coccinelles légèrement réduit $c_0 = 20$, et pour les valeurs $\alpha = 0{,}08$; $\beta = 10^{-4}$; $\gamma = 10^{-3}$; $\delta = 0{,}05$ on obtient, sur un nombre de jours égal à 90, le graphique ci-contre.

La première partie du graphique (30 premiers jours environ) présente une évolution des deux populations proies et prédateurs comparable à celle observée avec les données de la question précédente (sur la première quinzaine). Mais, ici, la chute de l'effectif des pucerons s'amortit sans tomber au-dessous de 82 ; elle se transforme en une hausse d'abord très modérée, puis de plus en plus marquée tandis que l'effectif des coccinelles se réduit à quelques unités. Avec des conditions sous serre sans changement, on peut se demander comment la situation évoluerait au cours des trois mois suivants (il suffit d'étendre le tableau à une plage plus grande et adapter l'intervalle des jours sur le graphique, c'est-à-dire augmenter xmax).

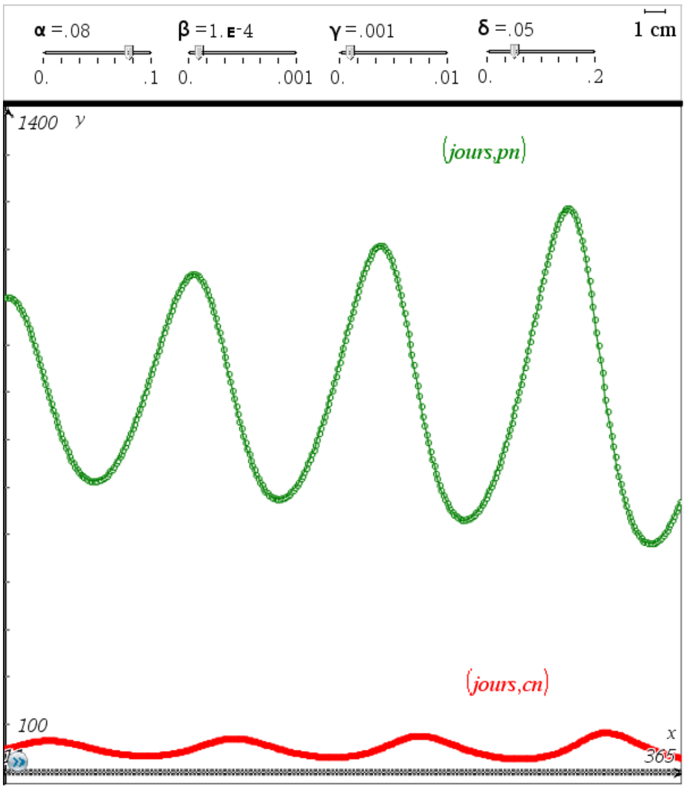


• Ici, $c_0 = 50$; $p_0 = 1\,000$; $\alpha = 0,08$; $\beta = 10^{-4}$; $\gamma = 10^{-3}$; $\delta = 0,05$.

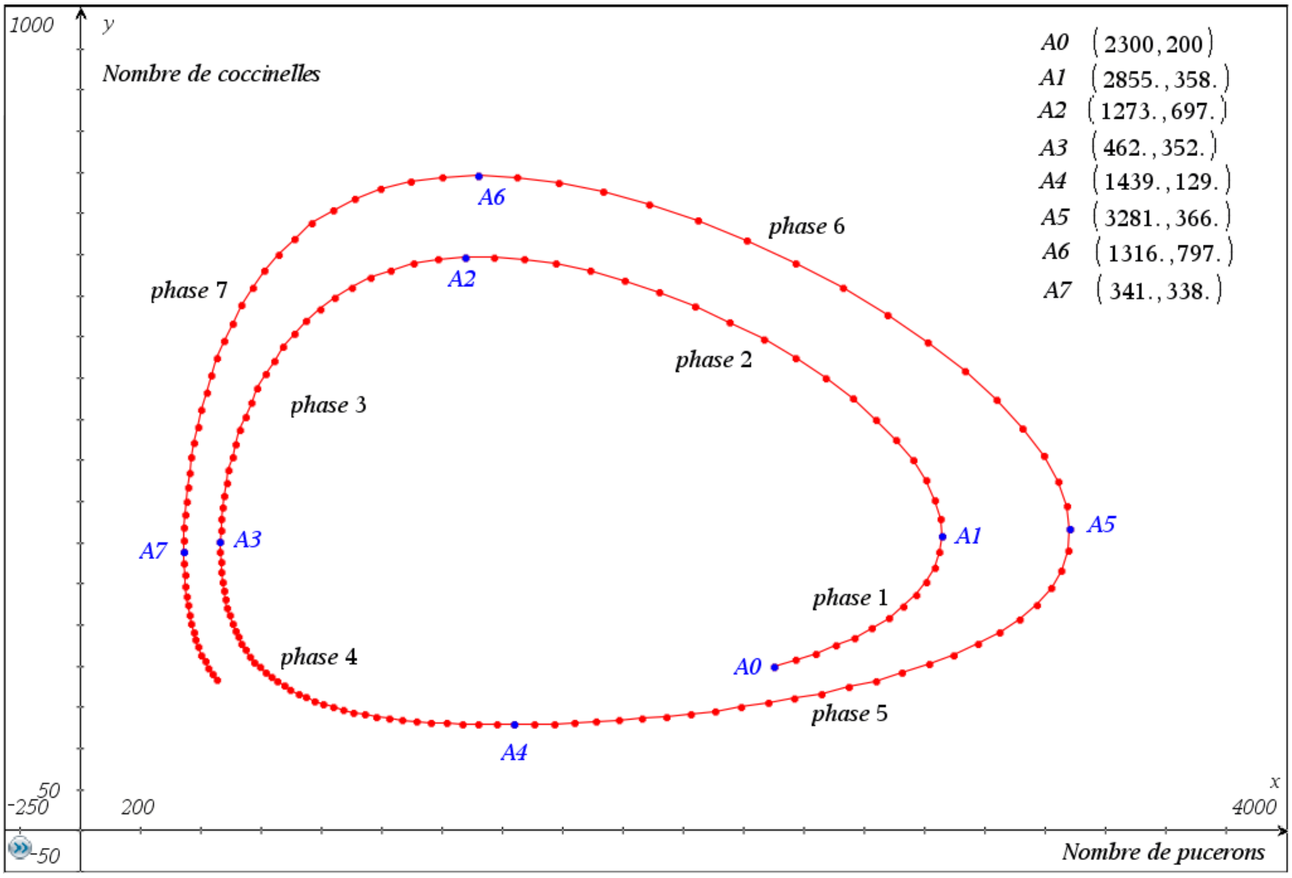
On obtient le graphique ci-contre, sur un nombre de jours égal à 365 (sans oublier que le point de vue du « chercheur » développé ici, doit être apprécié à la mesure de celui du praticien, ingénieur INRA ou directement les maraichers eux-mêmes, à savoir : la culture des concombres sur un mois ou trois mois a-t-elle encore du sens sur une période d'une année ?)

On observe pour chacune des deux populations une pseudo périodicité, avec une même période voisine d'une centaine de jours et un décalage dans le temps : la décroissance de l'effectif de pucerons par exemple débute alors que celui des coccinelles est encore en phase de croissance…

On s'en tiendra ici à ces deux exemples de comportements, mais les travaux des élèves ne manqueront pas de montrer la richesse de la situation.



3. a. Notons, sur la trajectoire du modèle d'évolution fournie en annexe, les points A_0, A_1, … , A_7 du nuage $(p_n\ ;\ c_n)$ correspondant tour à tour à un extremum relatif de chacune des suites (p_n) et (c_n). $A_0(2\,300\ ;\ 200)$ est le point initial, $A_1(2\,855\ ;\ 358)$ correspond au premier maximum relatif de la suite (p_n), $A_2(1\,273\ ;\ 697)$ correspond au premier maximum relatif de la suite (c_n), etc.

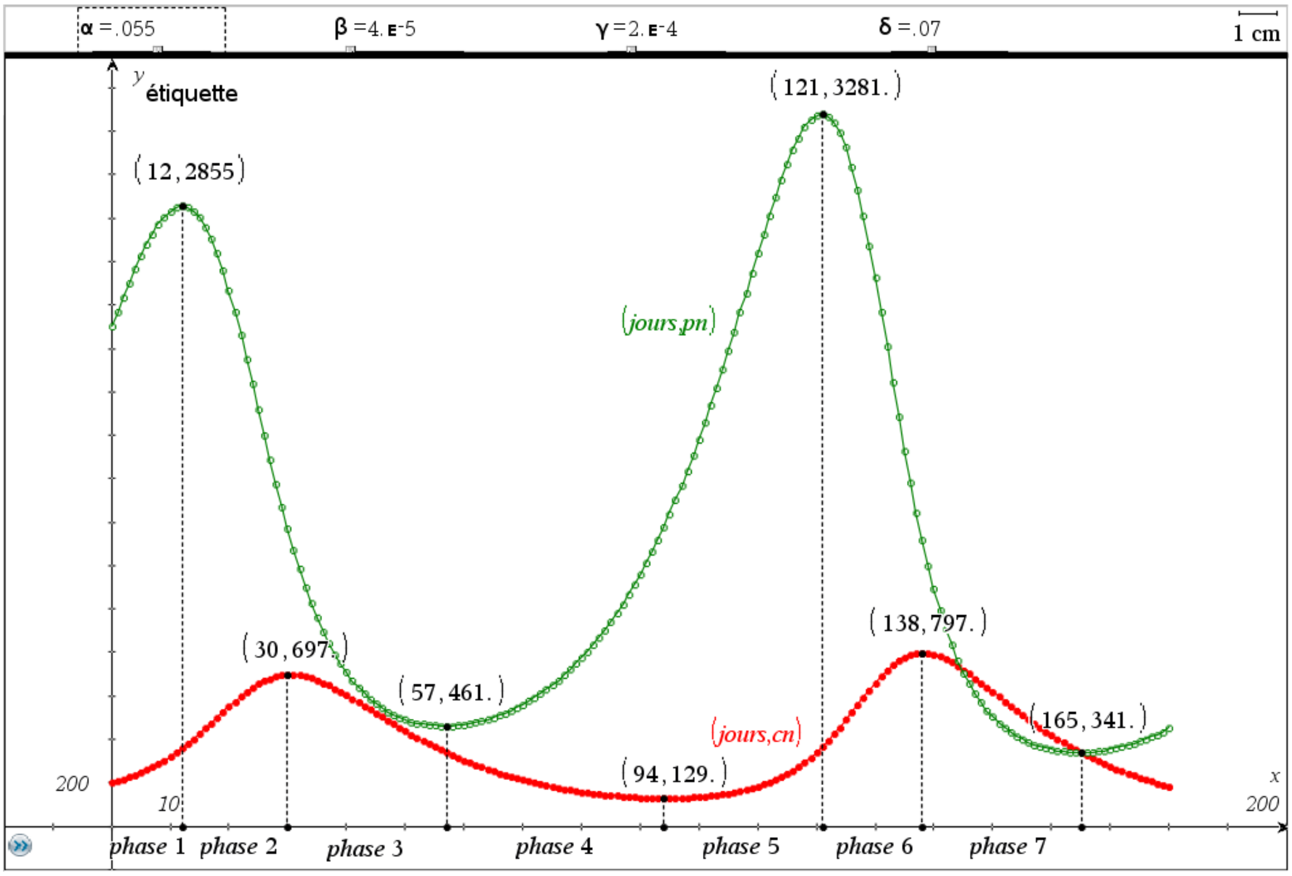


Lors de la phase 1, de A_0 à A_1, les suites (et (sont croissantes ; de A_1 à A_2 (phase 2) la suite (p_n) décroît tandis que la suite (c_n) croît et ainsi de suite.

On peut résumer les variations de deux suites dans un tableau de variation :

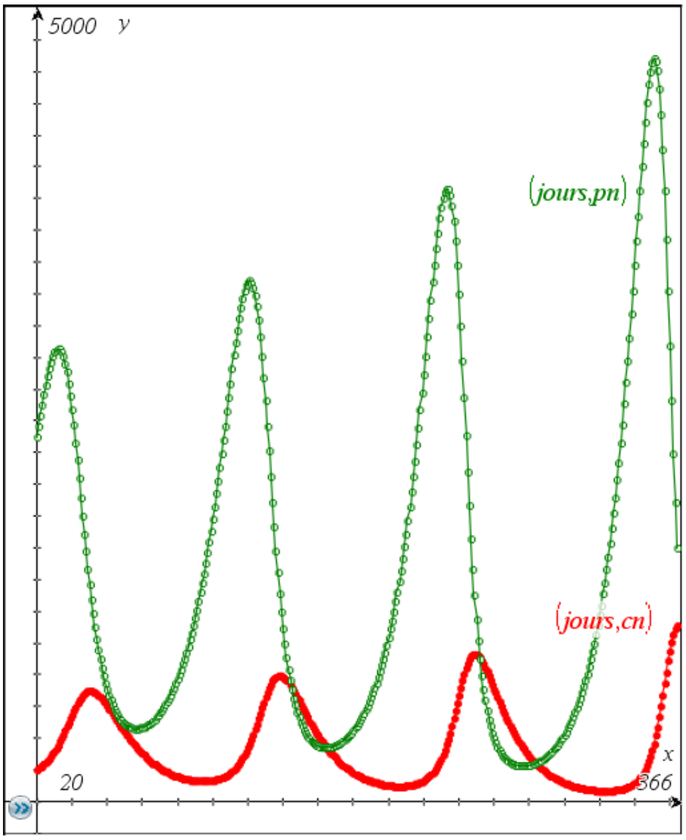
Phase n°	1	2	3	4	5	6	7
Jour n°	1 12	30	57	94	121	138	165
suite (	↗	↘	↘	↗	↗	↘	↘
suite (	↗	↗	↘	↘	↗	↗	↘

3. b. Le graphique ci-dessous présente les nuages de points $(j_n\,;\,p_n)$ et $(j_n\,;\,c_n)$ avec $n \in [0\,;\,180]$; les extremums relatifs des deux suites apparaissent aisément, permettant de retrouver les sept phases précédemment citées ; les numéros des jours correspondant aux changements de phases s'observent immédiatement : ce sont les abscisses des « sommets » des deux nuages.

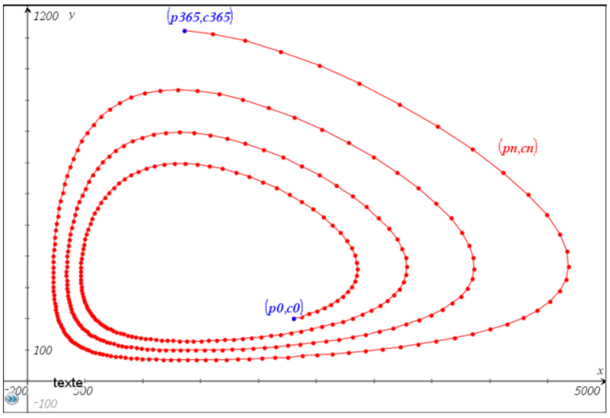


3. c. La pseudo-périodicité observée dans l'un des exemples proposés dans la réponse à la question **2b** apparaît à nouveau dans cette configuration. Les extremums observés s'accentuent sensiblement ; si le phénomène persiste, on peut craindre que l'un des minimums tombe à 0, compromettant peut-être la survie de l'une des espèces.

En étendant le tableur à une plage de 365 jours, il est possible d'avoir une idée de l'évolution des deux populations sur une année (en supposant toujours que les conditions de développement des deux espèces se maintiennent en l'état).



La trajectoire du modèle d'évolution continue de s'enrouler autour elle-même, et si l'on se risque à anticiper en s'en tenant à l'aspect théorique de cette modélisation, en dehors de toute considération de terrain, on peut s'interroger à long terme sur l'issue d'un tel enroulement : va-t-il finir par rencontrer l'un des axes du repère, ce qui correspond à l'extinction d'une espèce, ou bien « converger » vers une trajectoire fermée, permettant d'imaginer une sorte de *modus vivendi* permettant, avec des hauts et des bas, la survie des deux espèces ?



Partie 3 Étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre

1. Les suites (c_n) et (p_n)sont stationnaires si, pour tout entier n, $c_{n+1} = c_n$ et $p_{n+1} = p_n$. Sachant que $\begin{cases} c_{n+1} = c_n(1-\alpha+\beta\ p_n) \\ p_{n+1} = p_n(1+\delta-\gamma\ c_n) \end{cases}$, cette condition se traduit par $\begin{cases} c_n = c_n(1-\alpha+\beta\ p_n) \\ p_n = p_n(1+\delta-\gamma\ c_n) \end{cases}$.

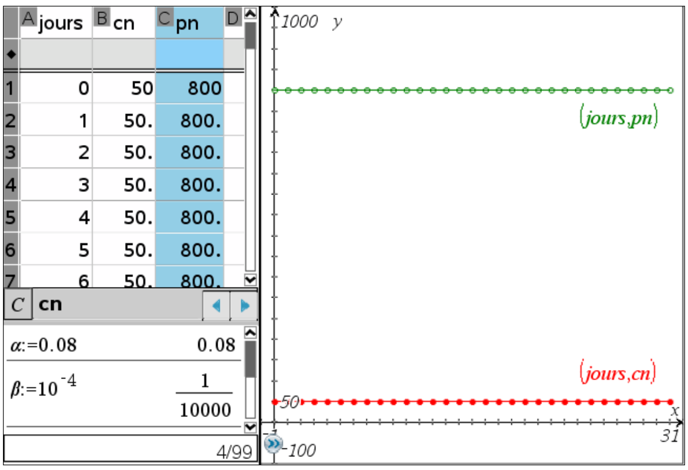
En écartant la solution triviale $c_n = p_n = 0$ pour tout n, on obtient : $\begin{cases} 1-\alpha+\beta\ p_n = 1 \\ 1+\delta-\gamma\ c_n = 1 \end{cases}$.

(c_n) et (p_n) sont stationnaires ; notons c^* et p^* les valeurs respectives de ces constantes ; le système devient : $\begin{cases} -\alpha+\beta\ p^* = 0 \\ \delta-\gamma\ c^* = 0 \end{cases}$;

il a une unique solution : $\begin{cases} p^* = \dfrac{\alpha}{\beta} \\ c^* = \dfrac{\delta}{\gamma} \end{cases}$

Pour $\alpha = 0{,}08$; $\beta = 10^{-4}$; $\gamma = 10^{-3}$; $\delta = 0{,}05$ on obtient $p^* = 800$ et $c^* = 50$.

Reprenons le tableur et les graphiques réalisés pour la question **1b** de la **Partie 2** : on constate que les suites (c_n) et (p_n) sont effectivement stationnaires.



2. a. On pose $\begin{cases} C_n = c_n - c^* \\ P_n = p_n - p^* \end{cases}$.

On en déduit : $C_{n+1} = c_{n+1} - c^* = c_n(1-\alpha+\beta\, p_n) - \dfrac{\delta}{\gamma} = \left(C_n + \dfrac{\delta}{\gamma}\right)\left(1-\alpha+\beta\left(P_n + \dfrac{\alpha}{\beta}\right)\right) - \dfrac{\delta}{\gamma}$

$$C_{n+1} = \left(C_n + \frac{\delta}{\gamma}\right)(1+\beta\, P_n) - \frac{\delta}{\gamma} = C_n + \frac{\beta\,\delta}{\gamma} P_n + \beta\, C_n\, P_n .$$

On parvient de la même manière à $P_{n+1} = P_n - \dfrac{\alpha\,\gamma}{\beta} C_n - \gamma\, C_n\, P_n$.

On obtient ainsi les deux relations du système (S1).

2. b. Comme l'indique l'énoncé, les solutions du système (S1) sont approchées, au voisinage du point d'équilibre, par celles du système (S2) $\begin{cases} C_{n+1} = C_n + \dfrac{\beta\,\delta}{\gamma} P_n \\ P_{n+1} = P_n - \dfrac{\alpha\,\gamma}{\beta} C_n \end{cases}$.

Ce système s'écrit matriciellement : $\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ P_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\beta\,\delta}{\gamma} \\ -\dfrac{\alpha\,\gamma}{\beta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n \\ P_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} C_n \\ P_n \end{pmatrix}$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\beta\,\delta}{\gamma} \\ -\dfrac{\alpha\,\gamma}{\beta} & 1 \end{pmatrix}$.

On a, pour n = 1, $\begin{pmatrix} C_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} C_0 \\ P_0 \end{pmatrix} = M^1 \begin{pmatrix} C_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$.

Supposons que, pour un entier n quelconque, $\begin{pmatrix} C_n \\ P_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} C_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$.

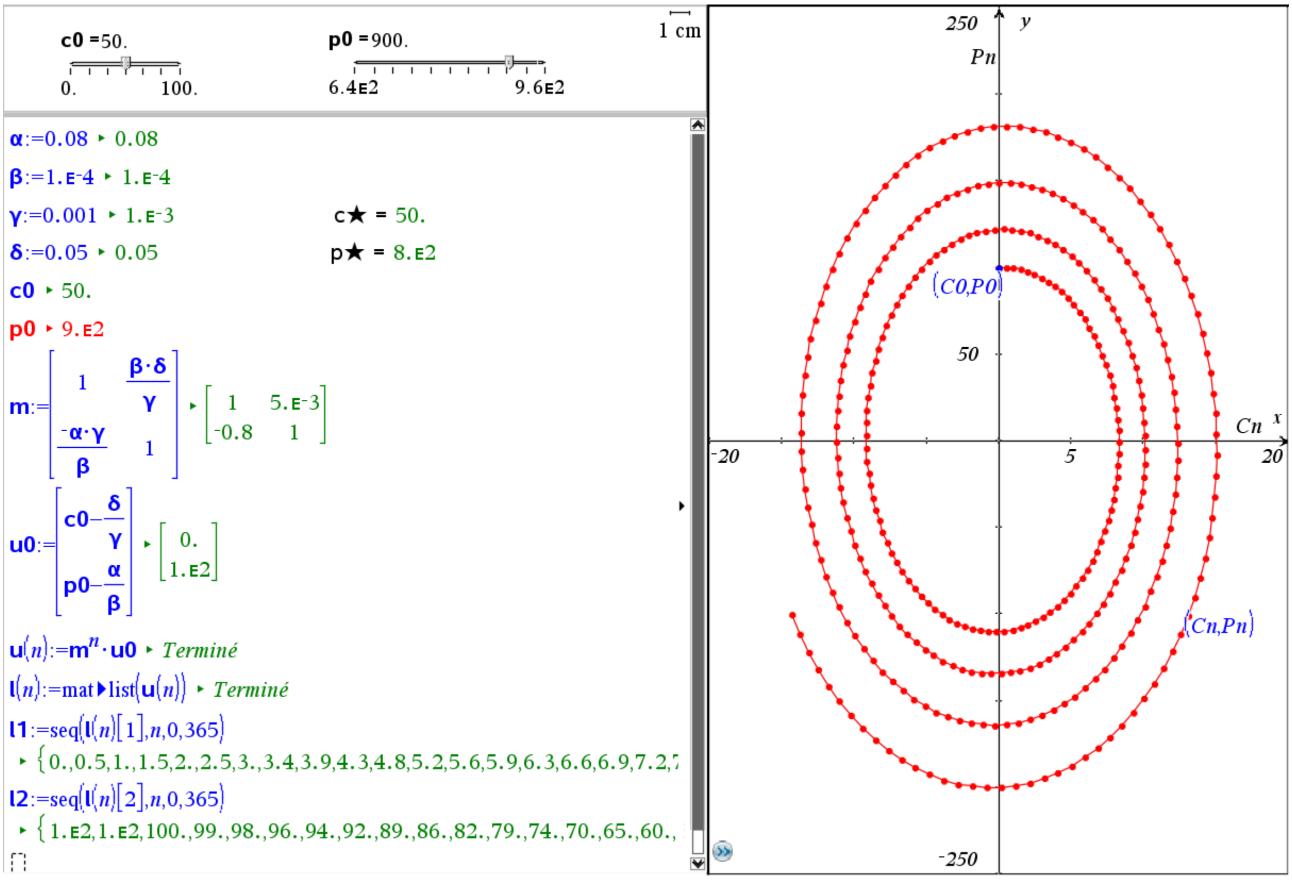
Alors, $\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ P_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} C_n \\ P_n \end{pmatrix} = M\; M^n \begin{pmatrix} C_0 \\ P_0 \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} C_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$.

On en déduit, en utilisant le principe de récurrence : pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} C_n \\ P_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} C_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$.

2. c. Les valeurs initiales sont ici : $c_0 = c^* = 50$ et $p_0 \in [0{,}8\, p^* \,;\, 1{,}2\, p^*]$, c'est-à-dire, $p_0 \in [640 \,;\, 960]$.

L'écran de la page suivante (ou la page 8.2 du fichier TI-Nspire joint) présente une première fenêtre (en haut à gauche) où deux curseurs ont été crées pour le choix des valeurs initiales c^* et p^*. Au-dessous, dans une page **Editeur mathématique**, les paramètres sont définis ainsi que la matrice M (notée ici m). **u0** est la matrice uni colonne $\begin{pmatrix} C_0 \\ P_0 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, **u**(n) = M^n. **u0** désigne la matrice uni colonne $\begin{pmatrix} C_n \\ P_n \end{pmatrix}$.

l(n) convertit la matrice uni colonne **u**(n) en un couple (C_n ; P_n) ; enfin **l1** fournit la suite des 366 premiers termes de la suite (C_n) et **l2** la suite des 366 premiers termes de la suite (P_n).
La trajectoire du couple (C_n ; P_n) n'est plus réduite au point fixe (0 ; 0) (p_0 est proche de p^* mais ne lui est pas égal) : elle s'enroule autour de ce point en diverge ant lentement.



Prolongements, suggestions

Il peut être envisagé d'élargir la situation en mettant en place le système **continu** fourni par le modèle proie-prédateur de Volterra : on pourra consulter le document ressource consacré aux matrices et associé au programme, pages 54 et 58 (http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/20/8/LyceeGT_ressources_SpeMath_Matrices_218208.pdf).

L'étude au voisinage de la trajectoire stationnaire permet de justifier la périodicité observée expérimentalement.

Référence au programme de l'enseignement de spécialité en Terminale S

Matrices et suites

Il s'agit d'étudier des exemples de processus discrets, déterministes ou stochastiques, à l'aide de suites ou de matrices.

On introduit le calcul matriciel sur des matrices d'ordre 2. Les calculs sur des matrices d'ordre 3 ou plus sont essentiellement effectués à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

Exemples de problèmes	Contenus
Modèle proie prédateur discrétisé : - évolution couplée de deux suites récurrentes ; - étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre.	• Matrices carrées, matrices colonnes : opérations. • Exemples de calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3. • Écriture matricielle d'un système linéaire.