EP 030–2008 : Comportement d'une suite récurrente

Auteur du corrigé : François Texier **TI-Nspire™/ TI-Nspire™ CAS**

Avertissement *: ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP030_2008_comportement.tns

1. Le sujet

Sujet 030 de l'épreuve pratique 2008 – Comportement d'une suite récurrente

Enoncé

Soit u_1 un nombre réel fixé. On considère la suite récurrente u de premier terme u_1 et telle que, pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + 1$.

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice calculer premiers termes de cette suite et en réaliser une représentation graphique.

Le choix du nombre de termes et de la valeur de u_1 est laissé au candidat, qui en testera plusieurs, dont $u_1 = -100$.

2. En fonction des différentes valeurs de u_1 :

a) émettre une conjecture sur le sens de variations de la suite u ;

b) émettre une conjecture sur la limite de la suite u.

3. Dans cette question on suppose que $u_1 = -100$.

a) Démontrer qu'à partir d'un certain rang n_0, à préciser, la suite u est décroissante.

b) Démontrer que la suite u est convergente et préciser sa limite.

Production demandée

- Écrans montrant les calculs ayant permis d'émettre les deux conjectures.
- Démarches et réponses argumentées pour la question **3**.

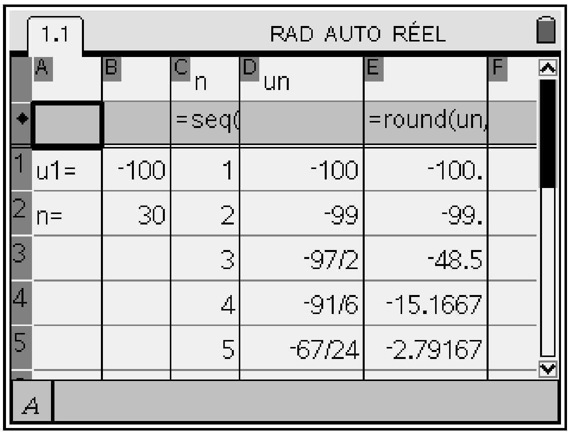
Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Faire calculer les termes d'une suite.
  - Construire un graphique.
- **Compétences mathématiques**
  - Étudier les variations d'une suite.
  - Déterminer la limite d'une suite.

2. Corrigé

Les écrans qui figurent dans ce document sont obtenus à partir de la calculatrice.

1) Ouvrir une page **Tableurs & listes**.



	A	B	C n	D un	E	F
◆			=seq(		=round(un,	
1	u1=	-100	1	-100	-100.	
2	n=	30	2	-99	-99.	
3			3	-97/2	-48.5	
4			4	-91/6	-15.1667	
5			5	-67/24	-2.79167	

Dans la cellule **A1** taper « **u1=** », puis dans la cellule **A2** taper « *n*= ».

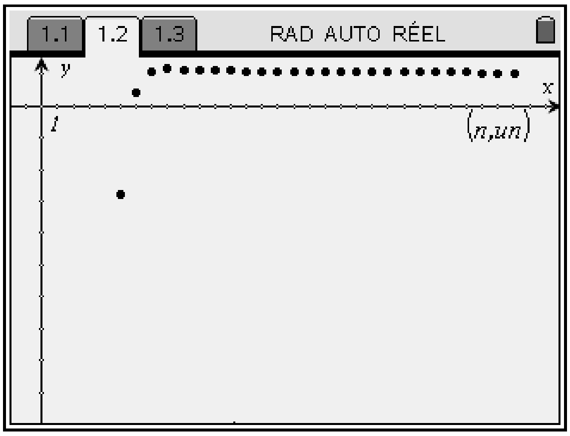
Dans la cellule **B1** taper -100, puis dans la cellule **B2** taper 30.

Nommer les colonnes **C** et **D** respectivement « **n** » et « **un** ».

Dans la cellule grise de la colonne C, taper la formule « **=seq(x,x,1,b2,1)** ».

Dans la cellule **D1**, taper la formule **=b1** ; dans la cellule **D2**, taper la formule **=d1/c1+1** ; puis la copier vers le bas.

Les valeurs de u_n sont données en valeurs exactes, utiliser alors la colonne E pour afficher une valeur approchée en tapant dans la cellule grise la formule « **=round(un,5)** ».



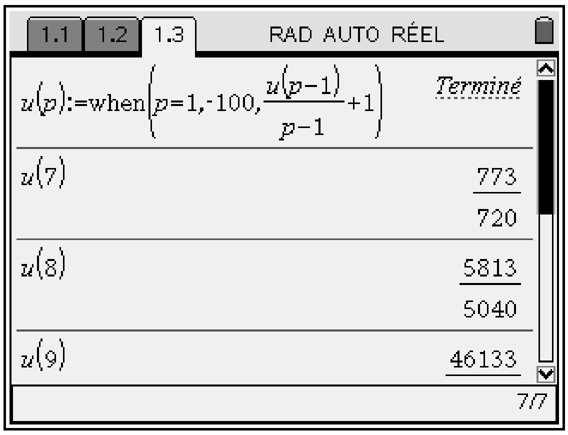
Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

Définir dans le menu **Type de graphique**, **Nuage de points** et lier x à **n**, y à **un**.

Choisir dans le menu **Fenêtre**, **Zoom–Données** ou **Réglage de la fenêtre** , puis demander le tracé.

Il suffit alors de modifier la cellule B1 du tableur et éventuellement la **Fenêtre** pour visualiser le comportement de la suite (u_n) en fonction des valeurs de u_1.
Il semble que cette suite soit, après quelques termes, décroissante et convergente vers 1, ceci quelque soit la valeur de u_1 .

2) Ouvrir une page **Calculs**.



D'après le tableur, il semble que, pour $u_1 = -100$, la suite soit décroissante à partir de $n = 9$.
Définissons, dans la page de calculs, la suite comme indiqué ci-contre.
Soit P_n la proposition : $0 < u_{n+1} < u_n$.

Pour $n = 9$, $u_{10} - u_9 = -\dfrac{773}{45360}$, donc $0 < u_9 < u_{10}$, donc P_9 est vraie.

Supposons P_n vraie au rang n, alors $0 < u_{n+1} < u_n$, de plus, n étant positif, $0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, donc par produit et ajout de 1, on obtient $1 < \dfrac{u_{n+1}}{n+1} + 1 < \dfrac{u_n}{n} + 1$, c'est-à-dire $0 < u_{n+2} < u_{n+1}$, donc P_{n+1} est vraie. Donc pour tout $n \geq 9$, P_n est vraie, donc la suite (u_n) est décroissante à partir de $n = 9$.

D'après le tableur, u_9 est positif et supérieur à 1.
Soit $\mathcal{Q}_n$ la proposition : $u_n > 1$.

Pour $n = 9$, $u_9 = \frac{46133}{40320} > 1$, donc Q_9 est vraie.

Supposons $\mathcal{Q}_n$ vraie au rang n, alors $u_n > 1$,

donc $\frac{u_n}{n} > \frac{1}{n} > 0$, donc $\frac{u_n}{n} + 1 > 1$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 1$,

donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.
Donc pour tout $n \geq 9$, $\mathcal{Q}_n$ est vraie, donc la suite (u_n) est minorée par 1.
La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

Soit $\mathcal{R}_n$ la proposition : $u_n < 1 + \frac{2}{n}$.

Pour $n = 9$, $u_9 - (1 + \frac{2}{9}) = -\frac{1049}{13440} < 0$, donc $\mathcal{R}_9$ est vraie.

Supposons $\mathcal{R}_n$ vraie au rang n, alors $u_n < 1 + \frac{2}{n}$, donc

$u_{n+1} - (1 + \frac{2}{n+1}) = \frac{u_n}{n} + 1 - (1 + \frac{2}{n+1}) = \frac{u_n}{n} - \frac{2}{n+1}$,

soit $u_{n+1} - (1 + \frac{2}{n+1}) < \frac{n+2}{n^2} - \frac{2}{n+1}$,

soit $u_{n+1} - (1 + \frac{2}{n+1}) < \frac{-n^2 + 3n + 2}{n^2(n+1)} < 0$ pour $n \geq 9$;

donc $u_{n+1} < (1 + \frac{2}{n+1})$, donc $\mathcal{R}_{n+1}$ est vraie.

Donc pour tout $n \geq 9$, R_n est vraie.

On a donc, pour tout $n \geq 9$, $1 < u_n < 1 + \frac{2}{n}$.

Or la suite de terme général $\frac{2}{n}$ converge vers 0, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge vers 1.