Nombre: ______________________________ Fecha: _______________

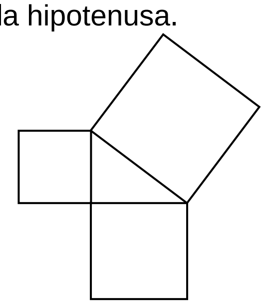
Actividad *NUMB3RS*: Ternas pitagóricas

En “Tránsito” el FBI busca la ayuda de Charlie después de una serie de ataques aparentemente fortuitos en las carreteras de Los Ángeles. Larry está en el pizarrón trabajando con unas fórmulas matemáticas complejas cuando llega Charlie y se da cuenta de que Larry está empleando el Teorema de Pitágoras.

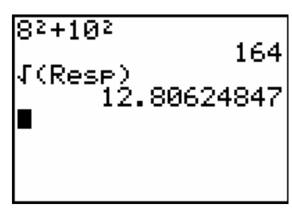
El Teorema de Pitágoras es de fundamental importancia en una amplia serie de aplicaciones matemáticas. Lleva el nombre de Pitágoras de Samos (c. 560–480 aC), quien fue un matemático, filósofo natural y dirigente religioso griego. El Teorema se conocía mucho antes de nacer Pitágoras, y se halló en una tableta babilónica que data de 1600 aC o aún antes.

El Teorema de Pitágoras dice que en un triángulo recto, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa (la hipotenusa de un triángulo recto es el lado opuesto de un ángulo recto). Algebráicamente, si a y b son las longitudes de los catetos y c es la longitud de la hipotenusa, entonces $a^2 + b^2 = c^2$.

Otra manera de concebir el Teorema de Pitágoras es considerar los cuadrados que se trazan sobre los lados de un triángulo recto tal como se ve en el diagrama. La suma de las áreas de los dos cuadrados trazados sobre los lados perpendiculares es igual al área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa.



Considera un triángulo recto en que un cateto es 8 y el otro es 10. Podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para hallar la longitud de la hipotenusa.



1. ¿Hay otros triángulos rectos que tengan lados (no necesariamente catetos) de longitudes 8 y 10? En tal caso, halla la longitud del tercer lado en estos triángulos.

2. Hay más de un triángulo recto con lados de longitudes 12 y 13. Aplica el Teorema de Pitágoras para hallar la longitud del tercer lado para cada uno de estos triángulos.

3. Todo conjunto de tres números enteros que satisfaga el Teorema de Pitágoras se llama una *Terna pitagórica*. Ejemplos de ternas pitagóricas son {6, 8, 10}, {5, 12, 13} y {7, 24, 25}. Halla otra terna pitagórica. En otras palabras, halla otro conjunto de enteros positivos a, b, c tales que $a^2 + b^2 = c^2$.

John F. Mahoney, Benjamin Banneker Academic High School, Washington, DC

Además de la estrategia de “adivinar y verificar”, hay un modo algebraico de crear ternas pitagóricas. Toma dos enteros cualesquiera, *m y n*, tales que $m > n$. Primero, halla los valores de $m^2 – n^2$, $2mn$ y $m^2 + n^2$. Sean estos tres valores *a*, *b* y *c* (las longitudes de los lados de un triángulo recto). Nota que $a^2 + b^2 = c^2$. Estos tres números forman una terna pitagórica. Para probar que esto siempre es cierto, demuestra que $\left(m^2 - n^2\right)^2 + \left(2mn\right)^2 = \left(m^2 + n^2\right)^2$ desarrollando y simplificando ambos lados de la ecuación.

$$\left(m^2 - n^2\right)^2 + \left(2mn\right)^2 = \left(m^2 + n^2\right)^2$$
$$m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$$
$$m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$$

Ejemplo: Supongamos que $m = 10$ y $n = 6$. Luego $m^2 – n^2 = 64$, $2mn = 120$ y $m^2 + n^2 = 136$. Usa la calculadora para verificar que estos valores formen una terna pitagórica.

4. Elige valores diferentes de *m* y *n* para llenar cinco ternas pitagóricas en la tabla.

m	***n***	***a***	***b***	***c***	**Div. entre 2**	**Div. entre 3**	**Div. entre 4**	**Div. entre 5**	**Div. entre 6**	**Div. entre 7**
10	6	64	120	136						

5. Contesta las preguntas siguientes marcando las casillas de la tabla. ¿Cuántas de tus ternas pitagóricas tienen al menos un número que sea par? ¿Cuántas tienen al menos un número que sea divisible entre 3? ¿Entre 4? ¿Entre 5? ¿Entre 6? ¿Entre 7?

6. Compara tus respuestas a la pregunta #5 con las de un compañero. Describe cualquier patrón que veas.

Otro método para generar ternas pitagóricas se basa en el empleo de cuatro números de Fibonacci consecutivos, así: Sea $a = F_n \cdot F_{n+3}$; $b = 2 \cdot F_{n+1} \cdot F_{n+2}$ y $c = F_{n+1}{}^2 + F_{n+2}{}^2$, donde F_n, F_{n+1}, F_{n+2} y F_{n+3} son números de Fibonacci consecutivos.

Ejemplo: Considera el conjunto de números de Fibonacci {3, 5, 8, 13}. Según las fórmulas de arriba, $a = 3 \cdot 13 = 39$; $b = 2 \cdot 5 \cdot 8 = 80$ y $c = 5^2 + 8^2 = 89$. Como $39^2 + 80^2 = 89^2$, estos números forman una terna pitagórica.

7. Considera el conjunto de números de Fibonacci {8, 13, 21, 34}. Calcula los valores *a*, *b* y *c* usando las fórmulas de arriba y verifica que formen una terna pitagórica.

8. Dos números enteros positivos cualesquiera pueden generar un patrón de Fibonacci diferente de la secuencia de Fibonacci real. Escoge dos enteros positivos cualesquiera y denomínalos F_1 y F_2. Sea $F_3 = F_1 + F_2$ y $F_4 = F_2 + F_3$. Usa estos cuatro valores para calcular los valores *a*, *b*, y *c* usando las fórmulas de arriba y determina si forman una terna pitagórica.

John F. Mahoney, Benjamin Banneker Academic High School, Washington, DC

El objeto de esta actividad es dar a los estudiantes un vistazo breve y sencillo de un tema matemático muy extenso. TI y NCTM lo invitan a usted y a sus estudiantes a aprender más sobre este tema con las extensiones que se ofrecen abajo y con su propia investigación independiente.

Extensiones

Para el estudiante

1. Demuestra que en una terna pitagórica al menos un número es par.

2. Demuestra que en toda terna pitagórica al menos uno de los números generados por $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ es divisible entre 3, que al menos uno es divisible entre 4 y que al menos uno es divisible entre 5.

3. Halla una terna pitagórica $\{a, b, c\}$ que no esté formada por $a = m^2 - n^2$; $b = 2mn$ y $m^2 + n^2$. Explica tu método.

4. Comprueba que si $F_3 = F_1 + F_2$ y $F_4 = F_2 + F_3$, entonces $F_3^2 - F_2^2 = F_1 \cdot F_4$.

Recursos adicionales

- Este libro trae diagramas geométricos dinámicos de muchas pruebas del Teorema de Pitágoras. Pythagoras Plugged In: Proofs and Problems for the Geometer’s Sketchpad, Dan Bennett, Key Curriculum Press, 1995.

- Para más información y perspectivas sobre las ternas pitagóricas, ver: **http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTriple.html**.

- Para más informaciones y comprobaciones de las propiedades de las ternas pitagóricas, ver: **http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/pythTriple.shtml**.

- Para un applet de Java que genera ternas pitagóricas, ver: **http://www.ces.clemson.edu/~simms/neat/math/pyth/**.

John F. Mahoney, Benjamin Banneker Academic High School, Washington, DC