

EP044–2008: Suite définie par une moyenne arithmétique

Auteur du corrigé : François Texier

TI-Nspire™ CAS

Avertissement : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site <http://education.ti.com/france>, menu Ressources pédagogiques.

Fichier associé : EP044_2008_moyenne_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 044 de l'épreuve pratique 2008 – Suite définie par une moyenne arithmétique

Énoncé

On considère la suite récurrente (u_n) définie pour tout n entier strictement positif par ,

$$u_n = \frac{6}{n} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n k^2$$

Partie expérimentale

1. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite (u_n) .
2. Émettre une conjecture sur le type de fonction f telle que, pour tout n entier entre 1 et 50 on ait : $u_n = f(n)$.
3. Mettre en place la stratégie validée par l'examineur et déterminer précisément la fonction f .

Démonstrations

4.
 - a) Démontrer que pour tout n entier naturel non nul, on a $u_n = f(n)$ où f est la fonction validée par l'examineur.
 - b) En déduire une formule simple donnant la somme des carrés des n premiers entiers strictement positifs.

Production demandée

- Des explications orales et à l'écran pour les questions 1. à 3. ;
- Les réponses argumentées à la question 4.

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
 - Traitement d'une formule sommatoire avec une calculatrice ou un tableur ;
 - Représentation graphique d'une suite.
- **Compétences mathématiques**
 - Détermination d'une fonction polynôme dont la courbe représentative passe par des points particuliers.
 - Démonstration d'une formule par récurrence.

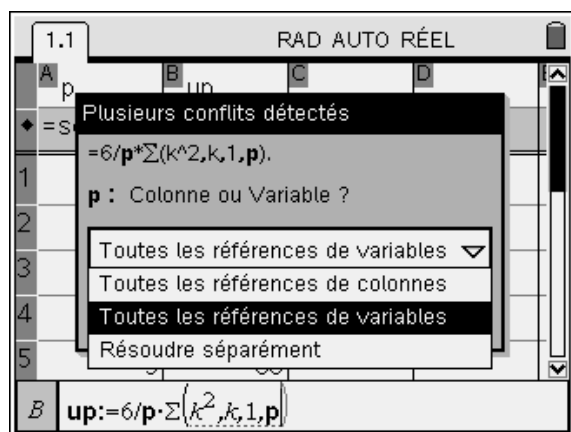
2. Corrigé

Les écrans qui figurent dans ce corrigé sont obtenus à partir de la calculatrice.

1) Ouvrir une page **Tableurs & listes**.

Nommer « **p** » la colonne A et « **up** » la colonne B.

Dans la cellule grise de la colonne **A**, taper la formule $\text{=seq}(x,x,1,50,1)$ pour afficher les 50 valeurs de **p**, puis dans la cellule grise de la colonne **B**, taper la formule $\text{=6/p} \cdot \sum(k^2, k, 1, p)$ pour calculer les 50 premiers termes de la suite u_n (attention à bien indiquer que la lettre p est une référence de variable et non de colonne).

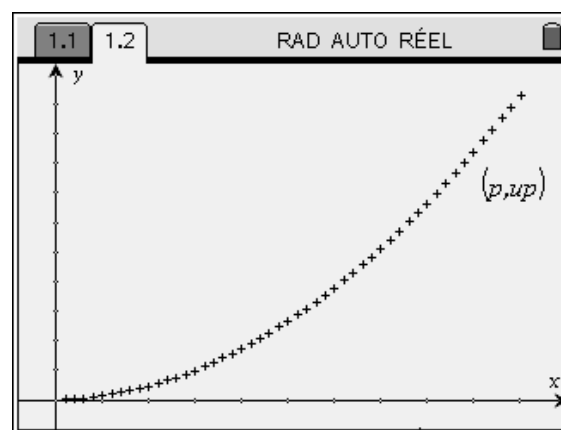
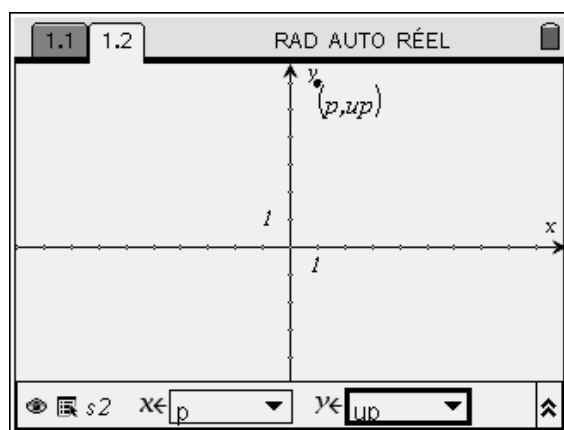


	A p	B up
1	1	6
2	2	15
3	3	28
4	4	45
5	5	66

Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

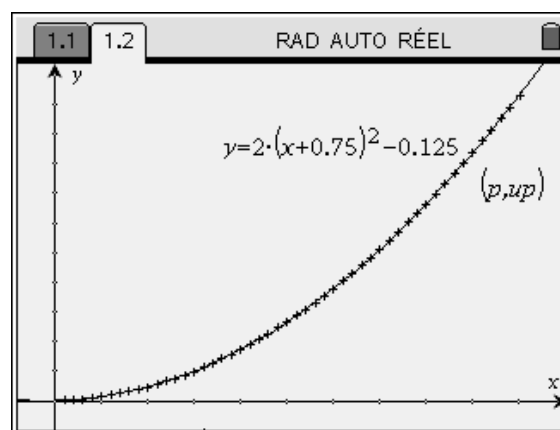
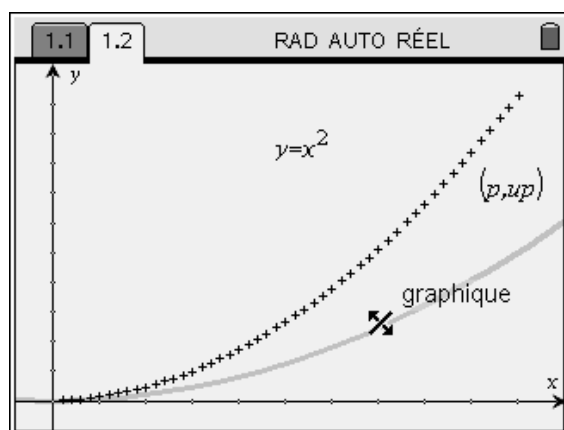
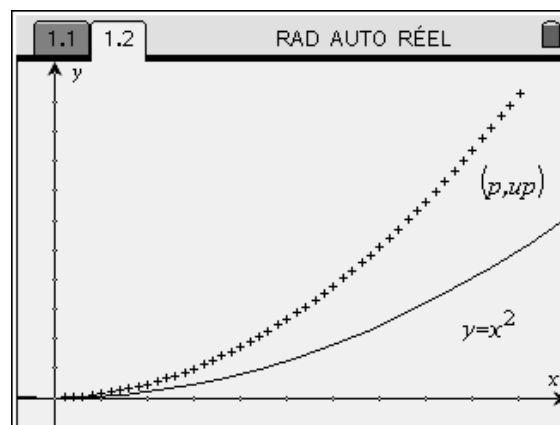
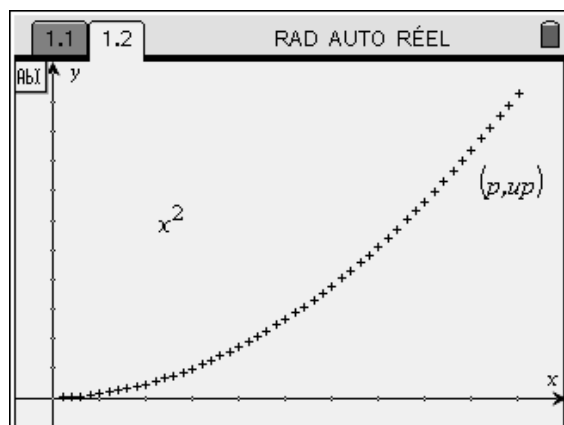
Définir dans le menu **Type de graphique**, **Nuage de points** et lier x à **p**, y à **up**.

Choisir dans le menu **Fenêtre, Zoom-Données**, puis demander le tracé.



La forme du nuage de points obtenu suggère que la fonction associée soit une fonction du second degré. Taper sous forme de **Texte** « x^2 » à l'intérieur de la fenêtre, puis déplacer ce texte pour l'amener sur l'axe des ordonnées, la parabole $y = x^2$ est alors tracée.

Ensuite à l'aide du curseur ajuster la courbe au nuage comme l'indiquent les écrans ci-dessous.



2) Ouvrir une page **Calculs**.

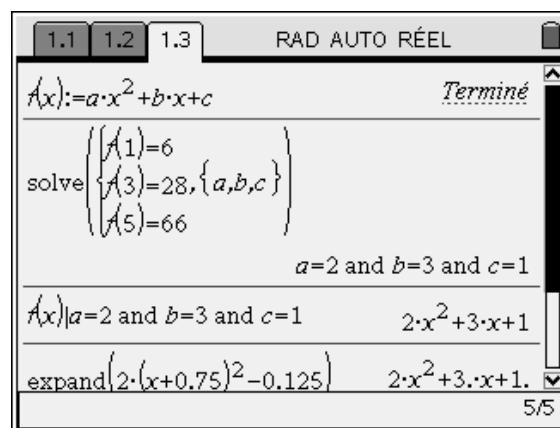
La forme du nuage suggère que f soit une fonction du second degré, soit $f(x) = a x^2 + b x + c$. Déterminons les nombres a , b et c en demandant la **Résolution** un système sachant que par exemple $f(1) = 6$, $f(3) = 28$ et $f(5) = 66$.

On obtient $f(x) = 2 x^2 + 3 x + 1$. On obtient la même écriture en demandant de développer l'expression obtenue dans la page graphique.

Dans la page **Tableur et listes**, taper dans la cellule grise de la colonne **C** la formule $=f(p)$, on constate alors que les valeurs des deux colonnes **B** et **C** sont identiques.

En écrivant l'expression de u_n et en demandant la forme factorisée de f , on constate que les écritures sont les mêmes.

Il ne reste plus qu'à valider l'expression de f en démontrant par récurrence que pour tout n strictement positif, $u_n = f(n)$.



Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition $u_n = (n+1)(2n+1)$.

Pour $n = 1$, $u_1 = \frac{6}{1} \times 1^2 = 6$, $(1+1)(2 \times 1 + 1) = 6$, donc

$\mathcal{P}_1$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie au rang n , alors $u_n = (n+1)(2n+1)$,

de plus $u_n = \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n k^2$, donc $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

$$u_{n+1} = \frac{6}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{6}{n+1} \left(\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \right),$$

$$u_{n+1} = \frac{6}{n+1} \left(\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \right)$$

$$u_{n+1} = n(2n+1) + 6(n+1) = 2n^2 + 7n + 6.$$

$$\text{Or } ((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6.$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n strictement positif.

Donc $u_n = (n+1)(2n+1)$, pour tout n strictement

positif, soit $\frac{6}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = (n+1)(2n+1)$,

1.1	1.2	1.3	RAD AUTO RÉEL	
A	p	B	up	C
=seq(x,x,1=6/p*Σ(k^=f('p)				
1	1	6	6	
2	2	15	15	
3	3	28	28	
4	4	45	45	
5	5	66	66	
A1		=1		

1.1	1.2	1.3	RAD AUTO RÉEL	
$f(x) := 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1$ Terminé				
factor($f(x)$) $(x+1) \cdot (2 \cdot x + 1)$				
$u(n) := \frac{6}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (k^2)$ Terminé				
$u(n)$ $(n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)$				
4/8				

donc, pour tout n strictement positif, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.