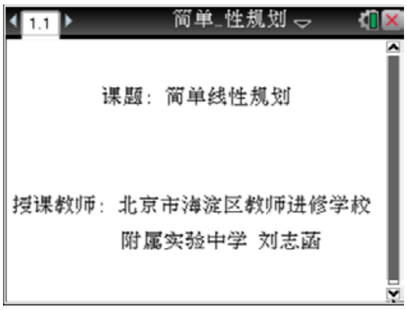
课题：简单线性规划

授课教师：北京市海淀区教师进修学校附属实验中学　刘志菡



【教学目标】

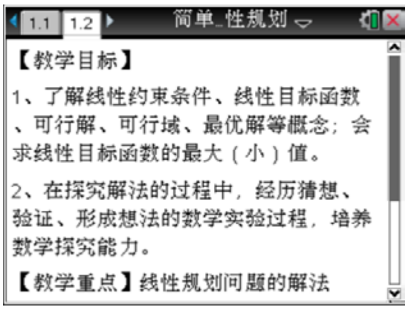
1、了解线性约束条件、线性目标函数、可行解、可行域、最优解等概念；会求线性目标函数的最大（小）值。

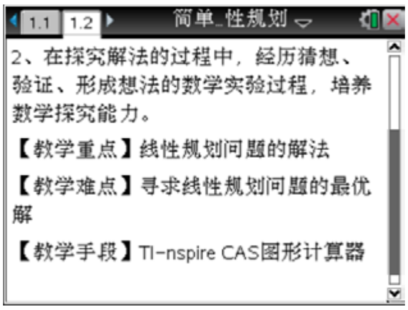
2、在探究解法的过程中，经历猜想、验证、形成想法的数学实验过程，培养数学探究能力。

【教学重点】线性规划问题的解法

【教学难点】寻求线性规划问题的最优解

【教学手段】TI-nspire CAS 图形计算器





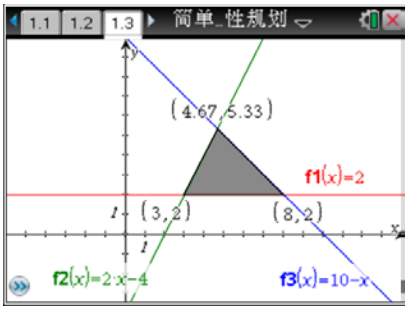
【教学过程】

一、创设问题情境：

哪位同学来说一下你作业的思路：

以下表示三种食物中的维生素 A,B 的含量以及单价：

	甲	乙	丙
维生素 A（单位/千克）	400	600	400
维生素 B（单位/千克）	800	200	400
单价（元/千克）	7	6	5



我校食堂师傅想购买这三种食物共 10 千克，使它们所含的维生素 A 不少于 4400 单位， 维生素 B 不少于 4800 单位. 请列出购买三种食物的千克数所满足的数量关系式，并画出相应的平面区域.

分析：设购买甲种食物 x 千克，乙种食物 y 千克，则购买丙种食物（$10-x-y$）千克，x, y 应满足的条件：

$$\begin{cases}400x+600y+400(10-x-y)\ge 4400\\800x+200y+400(10-x-y)\ge 4800\\x\ge 0,y\ge 0\\10-x-y\ge 0\end{cases}$$ 化简，得

$$\begin{cases}y\ge 2\\2x-y\ge 4\\x+y\le 10\\x\ge 0\end{cases}$$

师：这个问题中，条件是有限制的，而我们在实际生活中，也常常需要考虑怎样利用现有资源取得最大的收益，或者是怎样以最少的资源投入去完成一项任务。

2、出示本节课的探究问题：

现在我们的食堂师傅就希望能在上述条件下，使付出的金额最低。请同学们来帮助师傅计算一下这三种食物应各购买多少千克？

首先这个实际问题可以转化为什么样的数学问题呢？

分析：设总支出为 z 元，则 $z=7x+6y+5(10-x-y)=2x+y+50$，这时问题转化为在 x,y 满足不等式组条件下，求 z 的最小值.

其中 z 是关于 x， y 的二元一次函数，自变量 x， y 满足什么范围呢？

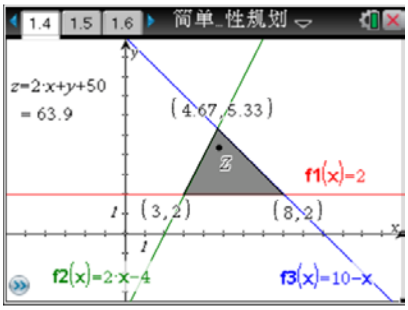
二、实验探究：

问题 1：如何求 z 在给定条件下的最小值？（给 1 分钟，然后讨论 1 分钟）——汇报 2 分钟。

*可能回答 **1**：画直线来判断，让其说理由，并追问你怎么想到的？其他同学理解他为什么这么想了吗？*

*可能回答 **2**：根据 x,y 的范围来求 z 的最小值*

如果回答不出来，进一步提示：这里 x,y 能取哪些数呢？

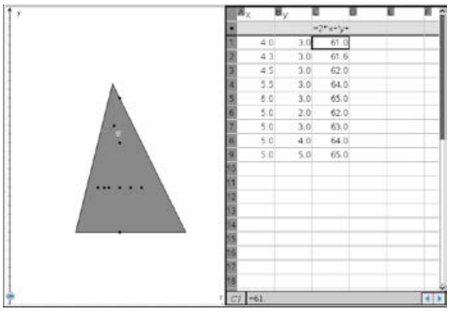


（移动 Z 点观察目标函数的值）

（1）$3\le x\le 8$, $2\le y\le 5.33$，如何求 z 的最小值呢？

根据不等式的性质即可。

点拨：很好，我们数形结合之后很容易结论就出来了． 其他同学理解了吗？



问题 2：继续追问：在同样条件，如何购买花费最多呢？ 能取到(8,5.33)吗？不能那我们该怎么求呢？

（2）平面区域内能取到哪些点呢？把它们代入试试，算算相应的 z 值，看看何时最大。

追问：如果尝试的话，你打算怎么选点？ 寻找一些规律：固定一个变另一个，看看会发现什么？

让学生展示他们的发现。

追问：还有没有满足条件的点呢？这些点之间有什么共同特征？

问题 3：平面直角坐标系下，z=2x+ y+50 它表示什么？

问题 4：请你解释为什么在点(8，2)处，z 取到最大值？
总结：我们可以把 z=2x+ y+50 看成是一组平行直线 y = ,求 z 的最小值就是求直线与阴影区域有公共点的情况下使与 y 轴交点的纵坐标 z-50 取得最小值.。

由图中可知，当直线过点（3，2）时，与 y 轴交点的纵坐标最小，即此时 z 取最小值， 因此购买甲种食物 3 千克，乙种食物 2 千克，则购买丙种食物 5 千克时，设总支出最小，为：3×7+2×6+5×5=58 元

如果学生没有反应： 第二套方案. 我们的食堂师傅也不是很清楚，所以他进行了几次尝试.

问题 1：在上述条件下，第一次师傅花了 64 元，你猜他是如何购买的？将对应的点在平面区域内标出。
追问：这里 x,y 能取哪些值呢？ 请同学们四人一组，讨论我们可以取哪些 x,y 值，将对应的点在平面区域内标出. 追问：这些点有什么共同特征？
问题 2：第二次师傅花了 62 元，你猜他是如何购买的？请你们将相应的点在平面区域内标出。

追问：问题2 中，62 元对应的点（x,y）有什么共同特征？
问题3：第三次师傅花了60 元，你猜他是如何购买的？请你找到相应的点.这些点又有什么共同特征呢？

追问：问题1、2、3 所对应的直线之间有什么联系？相应的总花费之间有什么关系？为什么会有这种联系？

问题4：如果在同样的条件下要使付出的金额最低，这三种食物师傅应各购买多少千克？
请给出你的建议，并给予解释。
问题5：请你猜测，在同样的条件下怎么购买会花费最多呢？

老师总结：
设购买甲食物x 千克，乙食物y 千克，丙食物(10-x-y)千克，付出的金额为z 元，则
z=7x+6y+5(10-x-y)=2x+y+50,
我们可以把z=2x+ y+50看成是方程y = – 2x + z –50,这个方程在平面直角坐标系下表示什么？这时观察方程，其中-2 表示什么？z-50 表示什么？
求z 的最小值就是求直线与阴影区域有公共点的情况下使与y 轴交点的纵坐标z-50取得最小值。

由图中可知，当直线过点（3，2）时，与 y 轴交点的纵坐标最小，即此时 z 取最小值， 因此购买甲种食物 3 千克，乙种食物 2 千克，购买丙种食物 5 千克时，总支出最小， 为：3×7+2×6+5×5=58 元. 当直线经过（8，2）点时，与 y 轴交点的纵坐标最大，此时 z 取最大值。因此购买甲种食物 8 千克，乙种食物 2 千克时，总支出最多。

三、形成概念：掌握新知 在上例的基础上，对比介绍与线性规划相关的概念——约束条件、目标函数、线性约束条件、线性目标函数、线性规划问题、可行解、可行域、最优解.

四、精简小结，巩固新知 总结线性规划问题解题的步骤:

（1）列：设未知数，列出数量关系式;

（2）作：作可行域;

（3）化：将目标函数化为 $y=kx+b$ 形式;

（4）移：由求目标函数最大（小）值判断直线的平移方向;

（5）求：求出最优解. 说明：如果是应用问题要注意;

（6）答：写出答案.

五、作业：

1）教材第 95 页 3,4 题.;

2）请你上网搜索各种食物中所含的蛋白质、脂肪等含量，根据自己一天的营养需求， 利用今天所学的线性规划知识设计一个一日三餐的健康食谱，让自己既能保持身材又能满足营养需求。

六、板书设计：

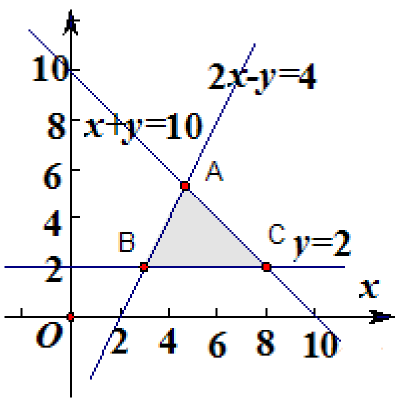
设购买甲种食物x 千克，乙种食物y 千克，则 作出平面区域

购买丙种食物（10-x-y）千克.，设总支出为 z 元，

则$z= 7x+6y+5(10- x- y)=2x+ y+50$，

x, y 应满足的条件：

$$\begin{cases} 400x+600y+400(10-x-y)\ge 4400 \\ 800x+200y+400(10-x-y)\ge 4800 \\ x\ge 0, y\ge 0 \\ 10-x-y\ge 0 \end{cases}$$



化简，得 $\begin{cases} y\ge 2 \\ 2x-y\ge 4 \\ x+y\le 10 \\ x\ge 0 \end{cases}$ 由图象可知，点 B

符合上述条件，解得（3， 2）

因此，当 x=3，y=2 时，z 取得最小值 z=2×3+2+50=58.。答：……