

Nom :

Classe :

F13 - APPROXIMATION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE PAR DES POLYNÔMES

Soit la fonction exponentielle $f : x \mapsto f(x) = e^x$ et soit C la courbe représentative de f .

Le but de cette activité est de trouver des polynômes P_n de degré n approchant la fonction f le mieux possible au voisinage de zéro. Pour cela on va mener à l'aide de la calculatrice une étude pour comparer les courbes de ces polynômes et C au voisinage de 0. Enfin on étudiera la qualité des approximations obtenues, c'est-à-dire l'erreur maximale commise en remplaçant $f(x)$ par l'un de ces polynômes sur $[-1 ; 1]$.

1) Tracé de la courbe C

Tracer sur la calculatrice la courbe C de la fonction f pour $x \in [-1,5 ; 1,5]$ et $y \in [-0,2 ; 2]$.

On choisira Y_1 dans $Y =$ ou $f(x)$.

2) Détermination de P_0 défini par $P_0(x) = a$

a) Quelle condition doit-on écrire pour que la courbe représentant P_0 et C coïncident en 0 ?

En déduire la valeur de a .

b) Tracer la courbe représentative de P_0 . (On choisira Y_2 dans $Y =$.)

3) Détermination de P_1 défini par $P_1(x) = a + b x$

a) Quelles conditions doit-on écrire pour que la courbe représentant P_1 et C coïncident le mieux possible au voisinage de 0 ? En déduire les valeurs de a et b .

b) Tracer la courbe représentative de P_1 . (On choisira Y_3 dans $Y =$.)

c) Comment appelle-t-on le polynôme P_1 ?

4) Détermination de P_2 défini par $P_2(x) = a + b x + c x^2$

a) Les conditions ayant permis de déterminer a et b permettent-elles de déterminer la valeur de c ?

b) L'allure de la courbe C permet de déterminer le signe de c . Pourquoi ? Quel est ce signe ?

c) Essayer différentes valeurs de c pour faire tracer la courbe de P_2 . (On choisira Y_4 dans $Y =$.)

On essaiera successivement : $c = 1$, $c = 2$, $c = \frac{3}{4}$, $c = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{4}$.

d) Quelle est la valeur de c qui semble le mieux convenir ?

e) Quelle condition pourrait-on écrire – en s'inspirant de la question 3) a) – pour déterminer la valeur de c la mieux adaptée ? En déduire c et faire tracer la courbe représentative du polynôme P_2 obtenu. (On choisira Y_4 .)

5) Détermination des polynômes P_3 et P_4

a) En utilisant la même méthode que dans la question précédente déterminer les polynômes définis par $P_3(x) = a + b x + c x^2 + d x^3$ et $P_4(x) = a + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4$.

b) Faire tracer leurs courbes représentatives (en choisissant Y_5 et Y_6 dans $Y =$).

6) Etude de la qualité des approximations obtenues

a) Etablir un tableau de valeurs pour ces courbes pour $x \in [-1 ; 1]$ avec un pas de 0,1 et le faire afficher.

b) En déduire un majorant de l'erreur commise sur cet intervalle lorsqu'on remplace $f(x)$ par respectivement $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ et $P_4(x)$.