F13 – APPROXIMATION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE PAR DES POLYNOMES

TI-82 Stats – TI-84 – TI 89 – Voyage 200

Mots-clés : représentation graphique, exponentielle, approximation, polynômes.

1. Objectifs

Rechercher des polynômes P_n de degré n qui permettent d'obtenir une approximation de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ au voisinage de 0. Conjecturer une généralisation de la notion d'approximation affine. Contrôler la qualité des approximations obtenues.

2. Énoncé

Voir fiche élève.

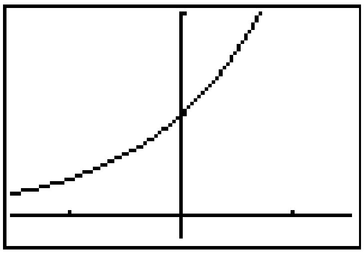
3. Mise en oeuvre et commentaires

Remarque :les questions **2)** *et* **3)** *font seulement appel à des notions abordées en Seconde et Première et devraient donc être traitées sans problème par les élèves de Terminale.*

1) Tracé de la courbe *C*

Tracé de la courbe *C* représentative de la fonction $f : x \mapsto e^x$ dans la fenêtre définie par $x \in [-1{,}5 ; 1{,}5]$ et $y \in [-0{,}2 ; 2]$.

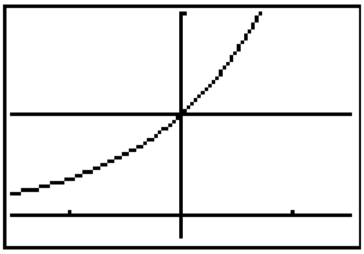
Saisir la fonction à l'aide de la touche **Y =** ou ***f*** **(*x*)**. Choisir Y_1.
Puis à l'aide de la touche **WINDOW** ou **fenêtre** faire les choix suivants :
X*min* = – 1.5 ; X*max* = 1.5 ; Y*min* = – 0.2 ; Y*max* = 2.
Faire tracer la courbe avec la touche **GRAPH** ou **graphe** (*écran* 1).



écran 1

2) Polynôme constant P_0 de degré 0

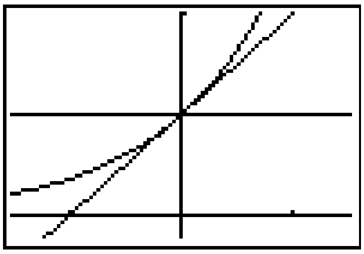
Ce polynôme constant est défini par $P_0(x) = 1$ car sa courbe doit coïncider avec *C* en 0 donc $P_0(0) = e^0 = 1$.
Saisir cette fonction à l'aide de la touche **Y =**. Choisir Y_2.
Faire tracer les courbes avec la touche **GRAPH** (*écran* 2).



écran 2

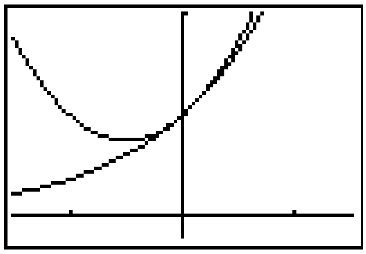
3) Polynôme P_1 de degré 1 : $P_1(x) = a + b\,x$

Ce polynôme est l'approximation affine de f au voisinage de 0.
On doit donc avoir $a = P_1(0) = e^0 = 1$ et $b = P_1'(0) = e^0 = 1$ d'où $P_1(x) = 1 + x$.
Saisir cette fonction à l'aide de la touche **Y =**. (Choisir Y_3.)
Faire tracer les courbes avec la touche **GRAPH** (*écran* 3).



écran 3

4) Polynôme P_2 de degré 2 : $P_2(x) = a + b\,x + c\,x^2$



écran 4

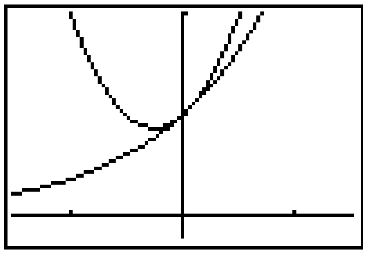
a) Comme précédemment les conditions de l'approximation affine doivent être remplies donc

$$a = P_1(0) = P_2(0) = e^0 = 1 \text{ et } b = P_1'(0) = P_2'(0) = e^0 = 1,$$

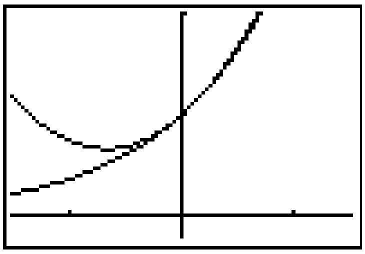
mais ces conditions ne permettent pas de déterminer la valeur de c. Par contre l'allure de la courbe C permet de conjecturer que c est un nombre positif.

b) On essaie successivement : $c = 1$, $c = 2$, $c = \frac{3}{4}$, $c = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$.

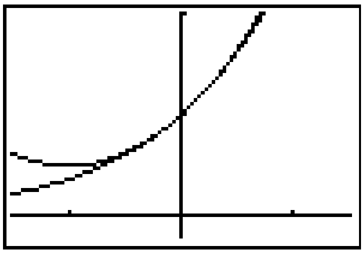
A chaque essai, saisir $P_2(x)$ à l'aide de la touche **Y =**. Choisir Y_4.
Faire tracer les courbes avec la touche **GRAPH** (*écran* 4 : $c = 1$, *écran* 5 : $c = 2$, *écran* 6 : $c = \frac{3}{4}$, *écran* 7 : $c = \frac{1}{2}$ et *écran* 8 : $c = \frac{1}{4}$).



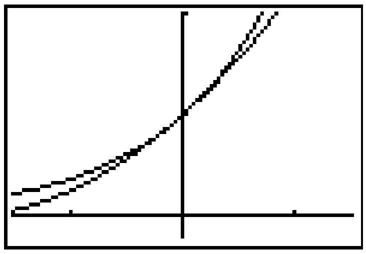
écran 5



écran 6



écran 7

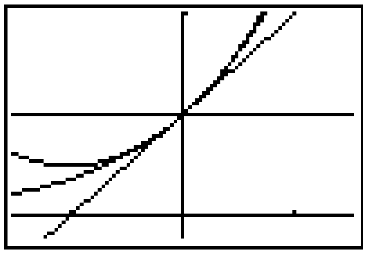


écran 8

c) Conjecturer la « bonne valeur » de c est difficile pour un élève qui peut hésiter entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2}$ et même se poser la question pour d'autres valeurs. Il faut alors le guider en lui rappelant la méthode adoptée pour l'approximation affine et poser $P_2''(0) = 2c = e^0 = 1$ d'où :

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

Saisir cette fonction à l'aide de la touche **Y =**. Choisir Y_4.
Faire tracer les courbes représentant C, P_0, P_1 et P_2, avec la touche **GRAPH** (*écran* 9).



écran 9

5) Polynômes P_3 et P_4

Faire découvrir avec la même méthode les polynômes :

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \text{ et } P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4.$$

Faire tracer leurs courbes en saisissant les fonctions dans Y_5 et Y_6.

6) Qualité des approximations

Initialiser le tableau de valeurs avec **[2nd] TBL SET** ou **[2nde] déf table** en donnant pour valeurs :

DébTable = –1 et PasTable = 0.1

Afficher le tableau de valeurs avec **[2nd] TABLE** ou **[2nde] table**.

On constate que l'erreur maximale sur [–1 ; 1] est inférieure à :
1,8 avec P_0 ; 0,72 avec P_1 ; 0,22 avec P_2 ; 0,06 avec P_3 ; 0,01 avec P_4 .