ESD 2008 – 0718 : Complexes et géométrie

Auteur du corrigé : Gilbert Julia **TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 de TI-Nspire.*

Fichier associé : esd2008_0718.tns

1. Le sujet

L'exercice proposé au candidat

1) Les nombres complexes a_1, a_2, a_3 et a_4 sont donnés.

Résoudre le système d'équations : $\begin{cases} z_1 + z_2 = a_1 \\ z_2 + z_3 = a_2 \\ z_3 + z_4 = a_3 \\ z_4 + z_1 = a_4 \end{cases}$ d'inconnue $(z_1 ; z_2 ; z_3 ; z_4)$ appartenant à $\mathbb{C}^4$.

2) Dans le plan, on considère un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$.

Montrer qu'il existe un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ dont les milieux des côtés sont les points A_1, A_2, A_3 et A_4 si et seulement si le quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ est un parallélogramme.

Montrer que, dans ce cas, le point de concours des diagonales du parallélogramme $A_1A_2A_3A_4$ est l'isobarycentre des points M_1, M_2, M_3 et M_4.

Le travail demandé au candidat

Q1) Dégager les diverses étapes de la résolution de la première question de l'exercice.

Q2) Indiquer les connaissances et savoir-faire mis en jeu dans cet exercice.

Sur ses fiches le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question Q1.
- L'énoncé d'un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « Interprétation géométrique des nombres complexes ».

2. Eléments de correction

Dès la classe de quatrième, les élèves ont pu démontrer que, étant donné un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$, le quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$, où A_1, A_2, A_3 et A_4 sont les milieux respectifs de $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$, $[M3M_4]$ et $[M_4M_1]$, est un parallélogramme (parallélogramme de Varignon[1]). L'exercice aborde à l'aide de l'outil des nombres complexes le problème réciproque : étant donné un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$, peut-on trouver un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ dont A_1, A_2, A_3 et A_4 sont les milieux des côtés ?

Ce problème amène, si on utilise l'outil des nombres complexes, à poser puis résoudre le système : $\begin{cases} a_1 = \dfrac{m_1 + m_2}{2} & a_3 = \dfrac{m_3 + m_4}{2} \\ a_2 = \dfrac{m_2 + m_3}{2} & a_4 = \dfrac{m_4 + m_1}{2} \end{cases}$, où les a_i désignent les affixes des points A_i et les m_i ceux des M_i.

[1] Pierre VARIGNON (1654 – 1722, membre de l'Académie Royale des Sciences, auteur de travaux en Mathématiques et en Physique (Mécanique notamment).

Il est à noter que le système d'équations proposé par l'énoncé ne donne pas directement la solution de ce problème, il faut comprendre que les résultats obtenus à la première question servent dans la suite de la résolution à condition de remplacer les nombres z_i par les nombres $\frac{m_i}{2}$.

3. Apport de la TI-Nspire

Prérequis : Savoir que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si les affixes respectives a, b, c et d de ses sommets vérifient la relation : $a-b+c-d=0$. Cette relation permet notamment d'exprimer l'affixe du quatrième sommet C du parallélogramme $ABCD$ lorsqu'on s'est donné les points A, B et D : $c=b+d-a$.

a. **Apports proposés**

- Utilisation du calcul formel pour la résolution de la question 1.
- Utilisation du module de géométrie pour élaborer une figure de synthèse clôturant l'exercice.

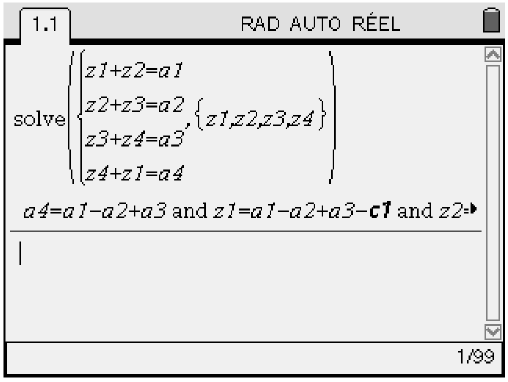
b. Résolution de la question 1

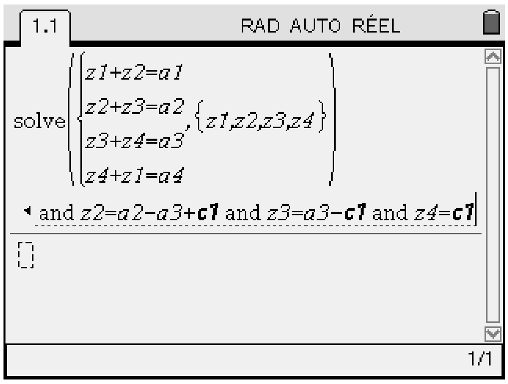
Ouvrir une page **Calculs.**

Choisir (menu) (3) **Algèbre** (1) **Résolution.**

Dans les **Modèles mathématiques** ((ctrl)(menu)(7)), sélectionner le modèle **Système d'équations** et fixer à 4 le nombre d'équations du système.
Ecrire le système d'équations de l'énoncé.
En réponse, la calculatrice affiche une condition de compatibilité, à savoir $a4=a1-a2+a3$, considère $z4$ comme un paramètre (noté **c1** sur les écrans ci-contre) et exprime $z1$, $z2$ et $z3$ en fonction de ce paramètre.

D'après le prérequis, la condition de compatibilité équivaut au fait que A_4 est le quatrième sommet du parallélogramme dont les trois autres sommets sont A_2, A_3 et A_1.

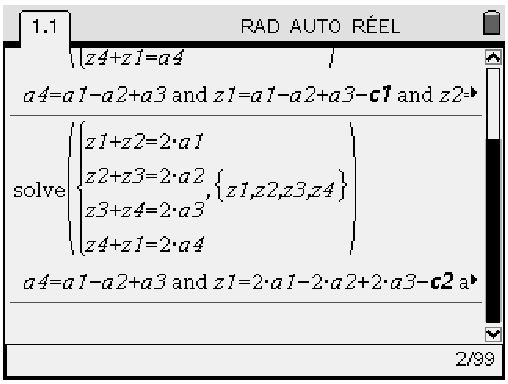




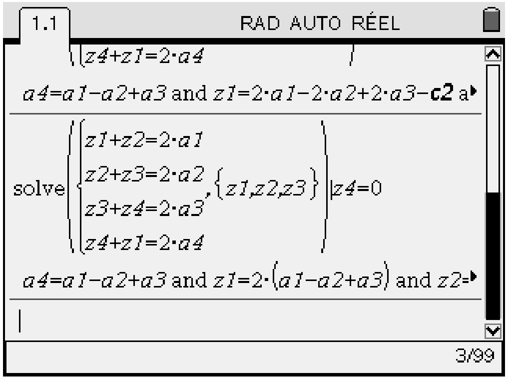
c. Résolution de la question 2

L'étude faite précédemment doit être appliquée non pas avec les nombres a_i mais avec les nombres $2a_i$, ce qui ne change rien d'autre à la situation que les expressions des solutions.

La condition de compatibilité reste la même, $z4$ joue toujours le rôle de paramètre : l'un des points, en l'occurrence ici M_4, peut être choisi arbitrairement, et ce choix détermine alors les trois autres points.



Le choix de M_4 étant arbitraire, on peut de plus choisir ce point comme origine du repère. $\{z1, z2, z3\}$ désigne maintenant l'inconnue et la condition « sachant que $z4 = 0$ » (barre verticale conditionnelle (|)) est ajoutée. On obtient : $z1 = 2(a1 - a2 + a3)$; $z2 = 2(a2 - a3)$ et $z3 = 2a3$



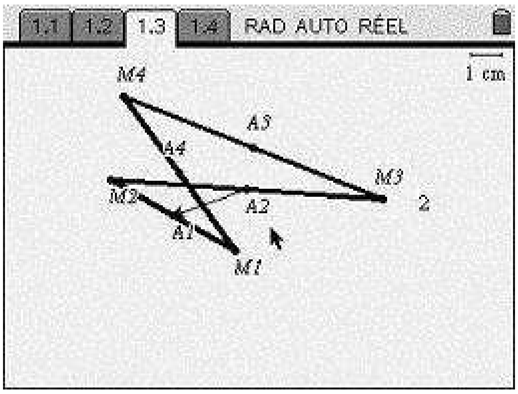
Si l'on se donne un parallélogramme $A_1A_2A_3A_4$, alors il existe une infinité de quadrilatères $M_1M_2M_3M_4$ dont les affixes vérifient le système de l'énoncé. Cependant, si on fixe l'un des quatre points, M_4 par exemple, alors il y a exactement un quadrilatère qui convient.

d. Interprétation géométrique et figure de synthèse

Insérer une page et choisir **Graphiques & géométrie**.
Les résultats numériques obtenus ci-dessus ont chacun une interprétation géométrique : $\overrightarrow{M_4M_1} = 2.\overrightarrow{M_4A_4}$;

$$\overrightarrow{M_4M_2} = 2.\overrightarrow{A_3A_2} = 2\overrightarrow{A_4A_1} \ ; \ \overrightarrow{M_4M_3} = 2.\overrightarrow{M_4A_3} .$$

Ces interprétations géométriques vont permettre de construire les points M_1, M_2 et M_3 connaissant M_4 : M_1 et M_3 sont les images de A_4 et de A_3 respectivement par l'homothétie de centre M_4 et de rapport 2. Le point M_2 peut être construit en exploitant l'interprétation obtenue ou en montrant que : $\overrightarrow{M_3M_2} = 2.\overrightarrow{M_3A_2}$.

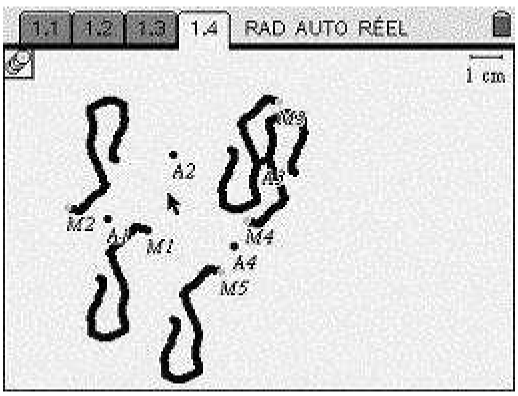


4. Pour aller plus loin

Prérequis : Savoir que la traduction complexe d'une symétrie centrale par rapport à un point d'affixe a donné est : $M(z) \mapsto M'(z' = 2a - z)$. Savoir que la traduction complexe d'une translation de vecteur d'affixe v est : $M(z) \mapsto M'(z' = z + v)$

Une approche géométrique du problème consiste à dire que, si un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ est solution du problème : pour i = 1, 2, 3 le point M_{i+1} est symétrique du point M_i par rapport au point A_i et que le symétrique M_5 de M_4 par rapport à A_4 doit coïncider avec M_1.

Insérer une page et choisir **Graphiques & géométrie**.
Afficher le plan géométrique.
Créer cinq points nommés respectivement A_1, A_2, A_3, A_4 et M_1. Construire pour i = 1, 2, 3, 4 le symétrique M_{i+1} du point M_i par rapport au point A_i. On obtient ainsi quatre nouveaux points M_2, M_3, M_4 et M_5.
En faisant bouger M_1, on peut observer le déplacement de ces derniers points. En activant pour chacun des points M_i (menu)(5)**Trace** (3)**Trace géométrique**, on peut conjecturer que les traces des points M_i pour i impair sont translatées de celle de M_1.



Les traductions complexes des transformations en jeu confirment cette conjecture :
$z_2 = 2a_1 - z_1$; $z_3 = 2a_2 - z_2 = 2(a_2 - a_1) + z_1$; $z_4 = 2a_3 - z_3 = 2(a_3 - a_2 + a_1)$ et
$z_5 = 2a_4 - z_4 = 2(a_4 - a_3 + a_2 - a_1) + z_1$
La condition de « fermeture » du circuit $M_5 = M_1$ est : $a_4 - a_3 + a_2 - a_1 = 0$ dont l'interprétation géométrique est que $A_1A_2A_3A_4$ doit être un parallélogramme.