EP007 - 2008 : Suites associées

Auteurs du corrigé : France et Michel Villiaumey **TI-Nspire™ / TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP007_2008_SuitesAssociées.tns

1. Le sujet

Sujet 007 de l'épreuve pratique 2008 – Suites associées

Enoncé

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} a_0 = 20 \\ b_0 = 60 \end{cases} \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{4} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases}$$

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice, calculer les 50 premiers termes des suites (a_n) et (b_n).

2. Peut-on penser que ces suites sont convergentes et quelle conjecture peut-on formuler quant à la limite de la suite (a_n) et à celle de la suite (b_n) ?

3. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies, pour tout entier naturel n, par :

$u_n = a_n + b_n$ et $v_n = b_n - a_n$

a) Compléter la feuille de calculs avec les 25 premiers termes des suites (u_n) et (v_n).

b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature de chacune de ces suites ?

c) Vérifier expérimentalement, sur la feuille de calcul, la conjecture émise, validée par l'examinateur.

4.

a) Démontrer la conjecture de la question **3.b)**.

b) Déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

c) Justifier les réponses données à la question **2.** et déterminer la valeur exacte de la limite des suites (a_n) et (b_n).

Production demandée

- Construction de la feuille de calculs complète ;
- Formulation orale des conjectures ;
- Réponses argumentées à la question **4.**

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Elaborer une feuille de calculs à l'aide d'un tableur.
- **Compétences mathématiques**
  - Connaître les résultats relatifs aux suites géométriques ;
  - Calculer la limite d'une suite convergente.

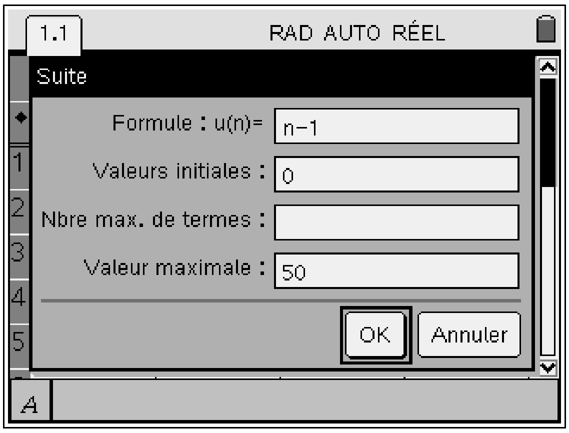
2. Corrigé

1) Ouvrir une page **Tableurs & listes**.

Ecrire dans la colonne **A**, les entiers naturels inférieurs ou égaux à 50 : se positionner dans la case grisée :

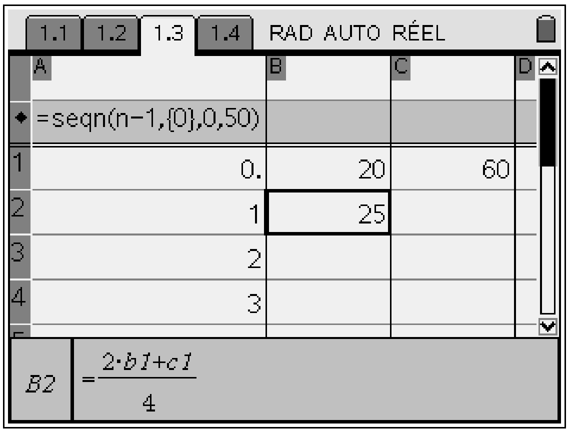
Menu. 3 : Données. 1 : Générer une suite.

Remplir comme ci-contre la boite de dialogue.



Ecrire respectivement en cellules **B1** et **C1** les valeurs de a_0 et b_0.

Ecrire en cellule **B2**, la formule donnant l'expression de a_{n+1}.



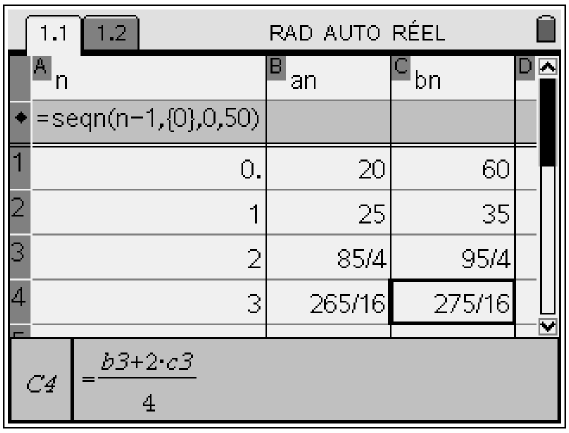
Ecrire en cellule **C2**, la formule donnant l'expression de b_{n+1}.

Sélectionner grâce à la touche les cellules **B2** et **C2**, utiliser la copie rapide par :

Menu. 3 : Données. 3 : Saisie rapide.

pour recopier vers le bas les deux formules jusqu'à la ligne 51.

Nommer les colonnes **A**, **B** et **C** respectivement *n*, *an* et *bn*.



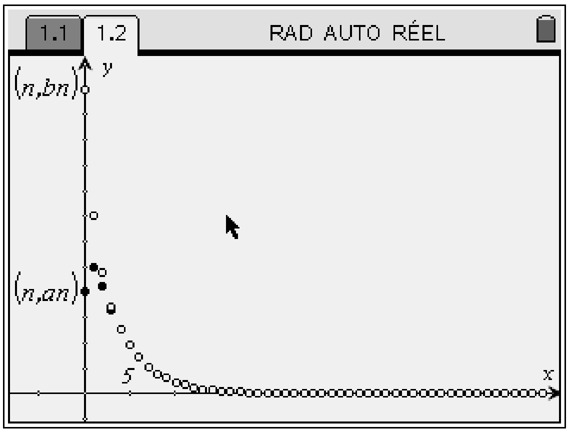
Représentation graphique :

Ouvrir une nouvelle page **Graphiques & Géométrie.**

Menu. 3 : Type de graphique. 4 : Nuage de points.

Sélectionner pour S1, *n* et *an* et pour S2, *n* et *bn*.

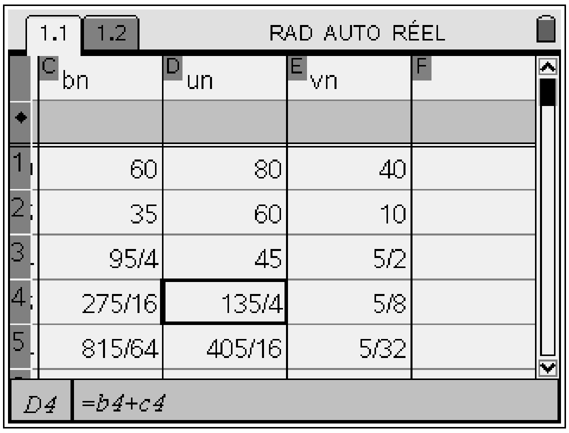
2) On peut conjecturer que les suites sont convergentes et que leur limite commune est 0.



3) *Suites u_n et v_n.*

Ecrire en cellule **D1** la formule **= A1 + B1** et en cellule **E1** la formule **= B1 – A1**.

Sélectionner ces deux formules et les recopier vers le bas jusqu'à la ligne 25.

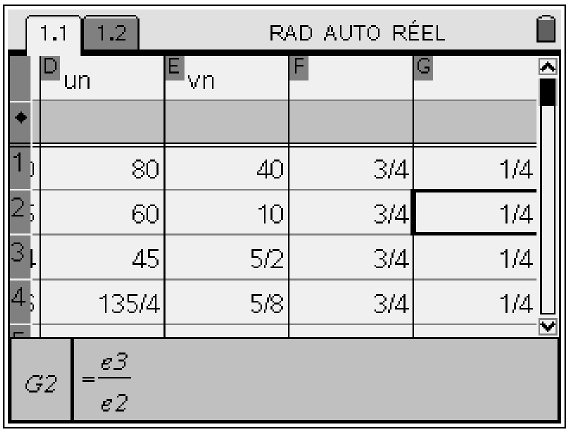


Conjecture sur la nature de suites u_n et v_n :

Ecrire en cellule **F1** la formule **= D2/D1** et en cellule **G1** la formule **= E2/E1.**

Sélectionner ces deux formules et le recopier vers le bas jusqu'à la ligne 24.

Le rapport des termes consécutifs semble effectivement constant, on peut conjecturer que les suites sont géométriques de raison $\frac{3}{4}$ pour la première et $\frac{1}{4}$ pour la seconde.



4) *Démonstrations :*

a) On peut écrire : $u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}$

$$= \frac{2a_n + b_n}{4} + \frac{a_n + 2b_n}{4} = \frac{3}{4}(a_n + b_n) = \frac{3}{4}u_n$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $u_0 = 80$,

son terme général s'écrit donc $u_n = 80 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

On démontre de la même manière que $v_n = \frac{1}{4}(b_n - a_n)$ et que $v_n = 40 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

b) En résolvant le système : $\begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ v_n = -a_n + b_n \end{cases}$,

on obtient $a_n = 40\times\left(\frac{3}{4}\right)^n - 20\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $b_n = 40\times\left(\frac{3}{4}\right)^n + 20\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$ étant des nombres < 1 les deux suites sont convergentes et ont pour limite 0.

Vérification à l'aide du tableur :

Ouvrir une nouvelle page **Tableur & listes**.
Nommer les colonnes **A**, **B** et **C** respectivement n, an et bn ; les colonnes se remplissent automatiquement des valeurs du tableur précédent.
Ecrire dans les cellules grisées des colonnes **D** et **E** les formules calculées de a_n et b_n.
Vérifier que les colonnes **A** et **C** d'une part et **B** et **D** d'autre part sont identiques.