Nom : …………………………………………………………..….   Classe : ………………………

AL5 – PARTS DE MARCHÉ

On suppose que 3 circuits de distribution de films se partagent exclusivement les salles de cinéma françaises : le circuit Action noté A, le circuit Boulevard noté B, le circuit Ciné-club noté C.
On note : A_n la part de marché possédée par le circuit A le mois n, B_n la part de marché possédée par le circuit B le mois n et C_n la part de marché possédée par le circuit C le mois n.

Conditions initiales
Au départ (mois noté 0), la part de A est de 20 % et celle de B de 50 %. Le nombre de spectateurs potentiel est 100 000 et chacun d'eux ne fréquente qu'un seul circuit.

Conditions d'évolution
D'un mois sur l'autre, pendant 1 an :

- A conserve 80 % de son implantation mais perd 10 % au profit de B,
- B conserve 70 % de son implantation mais perd 20 % au profit de A,
- C conserve 60 % de son implantation mais perd 30 % au profit de A.

Partie A : en utilisant les matrices

1) Condition initiale au mois 0
a) Quelle est la part de marché de C ?
b) Combien le circuit A a-il de spectateurs ? et B ? et C ?

2) Variations à l'issue du premier mois
a) Combien de spectateurs du circuit A demeurent fidèles à ce circuit ? Quelle part de marché cela représente-t-il ?
b) Combien de spectateurs du circuit A rejoignent le circuit B ? Quelle part de marché cela représente-t-il ?
c) Combien de spectateurs du circuit A rejoignent le circuit C ? Quelle part de marché cela représente-t-il ?
d) Répondre aux mêmes questions pour les circuits B et C.
e) En déduire les parts de marché A_1, B_1, et C_1 .

3) Variations des parts de marché
Compléter le tableau suivant :

mois	A	B	C
0	A_0 = 20 %	B_0 = 50 %	C_0 =
1	A_1 =	B_1 =	C_1 =
2	A_2 =	B_2 =	C_2 =

4) Calculs de probabilités
On considère la population P_1 , ensemble des 100 000 personnes qui sont allées au cinéma au cours du premier mois.
On choisit au hasard un spectateur.
Déterminer la probabilité de chaque événement suivant :

- « C'est un spectateur du circuit A » ;
- « C'est un ancien spectateur du circuit A qui a changé pour le circuit B » ;
- « Sachant que c'est un ancien du circuit A, il a changé pour le circuit B » ;
- « Sachant qu'il a changé de circuit, il est actuellement spectateur du circuit A ».

5) On note P_n le vecteur représentant la répartition du marché. La première ligne représentera les parts de marché de A, la deuxième celle de B et la troisième celle de C.
Soit $P_n = (A_n \quad B_n \quad C_n)$. Déterminer la matrice M telle que $P_1 = P_0\, M$.

6) Exprimer P_2 en fonction de M et de P_1, puis en fonction de M et de P_0 .

7) Avec la calculatrice
Vérifier que P_1 et P_2 calculés avec la matrice M donnent les mêmes résultats que dans le tableau.

Quelles sont les parts de marché de chaque circuit au bout de 3 mois ? de 6 mois ? d'un an ?

Partie B : en utilisant les graphes

1) Traduire l'évolution des parts de marché par un graphe pondéré.

2) Écrire la matrice de transition M.

3) Soit $L = \begin{pmatrix} x & y & 1-x-y \end{pmatrix}$ une condition initiale. Déterminer x et y pour que L soit une situation stable.

4) Avec la calculatrice, conjecturer $\lim\limits_{n \to +\infty} M^n$.