ESD 2009 – 0629 : Outil des transformations

Auteur du corrigé : Gilbert Julia **TI-Nspire™ CAS**

Avertissement *: ce document a été réalisé avec la version* 1.7 *de TI-Nspire CAS.*

Fichier associé : esd2009_0629.tns

1. Le sujet

1. L'exercice proposé au candidat

On considère dans le plan trois droites parallèles et distinctes (D_1), (D_2) et (D_3). Une droite (Δ) coupe (D_1), (D_2) et (D_3) respectivement en A, B et C. Soit N un point de (D_2) distinct de B. La parallèle à (NC) passant par B coupe (D_1) en M. La parallèle à (NA) passant par B coupe (D_3) en P.

1. Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en C. Construire les points M' et N', images respectives de M et N par l'homothétie h.

2. En déduire les images de M et N par la transformation $f = t_{\overrightarrow{NB}} \circ h$

3. Montrer que les points M, N et P sont alignés.

2. Le travail demandé au candidat

Le candidat rédigera sur ses fiches :

- Sa réponse à la question **1** de l'exercice.
- Un ou plusieurs exercices utilisant les transformations comme outil.

Le candidat présentera au jury :

- Le contenu de ses fiches.
- Les méthodes et les savoirs mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans l'exercice.

2. Eléments de correction

L'exercice proposé a pour objectif l'étude d'un problème d'incidence (alignement) à l'aide de l'outil des transformations. Cet exercice met en jeu la composée d'une homothétie et d'une translation, composée dont l'étude figure explicitement au programme de terminale S Spécialité.

La figure sur laquelle l'élève aura à travailler est assez complexe et sa réalisation peut constituer une difficulté (il se peut que sa réalisation sur papier demande plusieurs essais en raison d'une position hors cadre des points M' et N').

L'énoncé est très directif et l'exercice nécessite lors de sa correction une solide synthèse *a posteriori* de la part de l'enseignant.

Savoirs mis en jeu dans l'exercice

Ils concernent essentiellement les propriétés des homothéties et des translations :

- L'image par une homothétie h d'une droite (D) passant par un point donné I est la droite parallèle à (D) passant par le point $h(I)$ (question **1**).
- Une droite passant par le centre d'une homothétie est globalement invariante par cette homothétie (question **1**).
- L'image par une application affine du point d'intersection de deux droites est le point d'intersection des deux droites images (question **1**).
- La composée d'une homothétie de rapport k ($k \neq 1$) et d'une translation est une homothétie de rapport k (question **3**)

Méthodes.

- Pour déterminer l'image du point d'intersection de deux droites par une application affine, on peut chercher quelles sont les images de ces deux droites (question **1**).
- Pour prouver l'alignement de trois points, on peut chercher à prouver que l'un des trois est image d'un autre par une homothétie de centre le troisième point.

Objectifs d'apprentissage

Les deux premières questions de l'exercice ont pour objectif la mise en application de propriétés usuelles des homothéties et translations et de leur composition.

La question **3** met en scène une application spécifique des homothéties à des problèmes d'incidence : l'alignement centre-point-image. Le centre d'une homothétie, un point distinct du centre et son image sont des points alignés, on peut donc démontrer un alignement si l'on parvient à obtenir cette occurrence. L'exercice veut montrer que cette occurrence est parfois obtenue par une composition convenable de deux transformations.

Toutefois, on peut émettre quelques réserves, voire faire preuve d'un certain scepticisme, à propos de l'efficience de l'exercice à induire de nouveaux apprentissages sur la pratique de l'outil des transformations. Il semble qu'un tel exercice est plutôt destiné à *fixer des savoirs* déjà rencontrés à d'autres occasions. En effet, l'élève est ici réduit à un rôle d'exécutant, sa part d'initiative est faible. Les deux transformations utilisées sortent comme deux lapins d'un chapeau, et il est peu probable qu'un élève ordinaire de terminale S comprenne de lui-même dans quel but elles interviennent et pourquoi l'énoncé impose ces transformations-là. L'enseignant a un rôle d'explication décisif à jouer lors de la correction de l'exercice pour aider l'élève à transférer à d'autres situations les méthodes en jeu.

3. Apport de la TI-Nspire

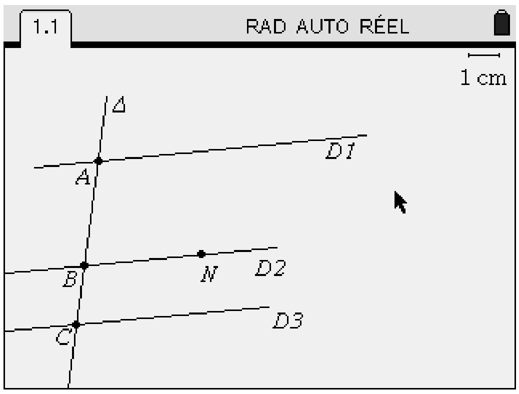
a. **Apports proposés**

- Réalisation d'une figure illustrant l'exercice.
- Réalisation d'une figure d'étude « pour aller plus loin ».

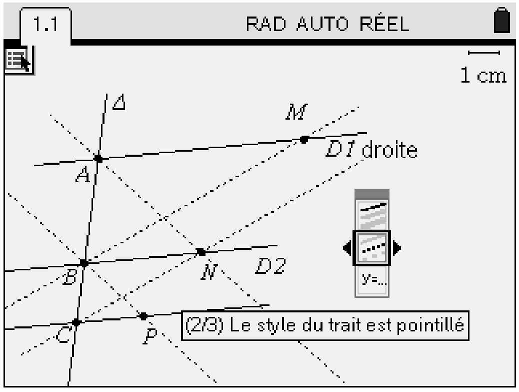
b. Réalisation de la figure conformément à l'énoncé.

Ouvrir une page **Graphiques & géométrie** puis Afficher le plan géométrique. On peut commencer par créer les droites (D_1) et Δ passant par un point A, puis créer deux autres points B et C sur Δ et construire les parallèles (D_2) et (D_3) à la droite (D_1) passant respectivement par B et par C.

Marquer un point N sur la droite (D_2).

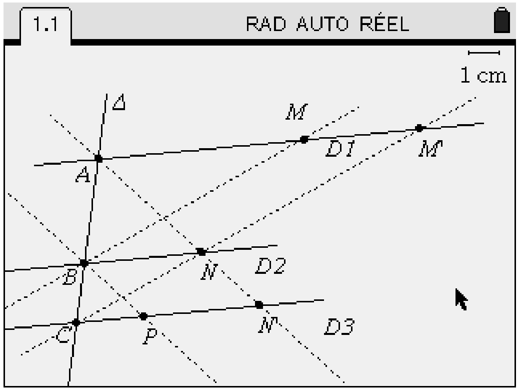


Créer les droites (NA) et (NC) puis construire leurs parallèles passant par B. Définir les points M et P en tant que points d'intersection.



A l'aide de l'outil Attributs (menu 1 4) on peut modifier l'aspect des objets pour rendre la figure plus lisible. Par exemple, (Δ), (D_1), (D_2) et (D_3) restent en trait plein tandis que les objets dépendant du point N sont en style de trait pointillé.

La figure peut être présentée aux élèves à ce stade de réalisation (ou construite par eux). La question : « Comment obtenir les points M' et N' ? » se pose à ce moment précis.



Les points M' et N' sont obtenus non pas à l'aide du menu Transformations du logiciel, mais en appliquant les propriétés des homothéties. L'énoncé aurait dû dire « *Déterminer* les images M' et N' des points M et N … » puisque aucune nouvelle construction n'est à exécuter.

L'exploitation de la figure peut atténuer le parachutage des transformations utiles, inconvénient majeur de l'énoncé, et développer auprès des élèves une vision dynamique : « Existe-t-il une transformation autre que l'homothétie inverse de h permettant de renvoyer M' sur M ? Comment agit-elle sur d'autres points remarquables ? ».

Il incombe aux élèves de proposer la translation $t_{\overrightarrow{NB}}$. Il reste à penser à composer les deux transformations et à expliquer comment l'alignement des points M, N, P est démontré.

4. Pour aller plus loin

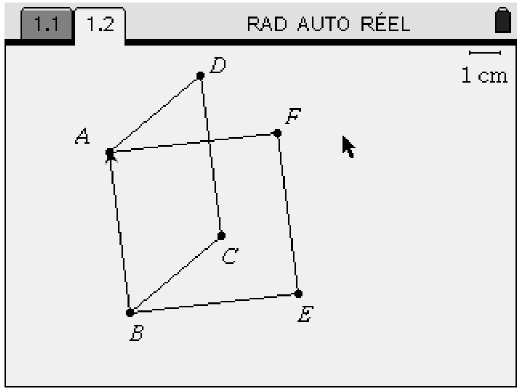
La figure finale présente deux parallélogrammes, $BNN'P$ et $BNM'M$ ayant non seulement un côté commun mais aussi une diagonale commune : la diagonale (MN) de l'un est la même droite que la diagonale (NP) de l'autre. Les points A et C sont points d'intersection d'un côté de l'un avec un côté de l'autre. La situation proposée amène à cette question : Dans quel cas deux parallélogrammes non aplatis accolés ont-ils une même diagonale ?

Il apparaît intéressant, en approfondissement, de reformuler ce problème en utilisant de nouvelles notations :

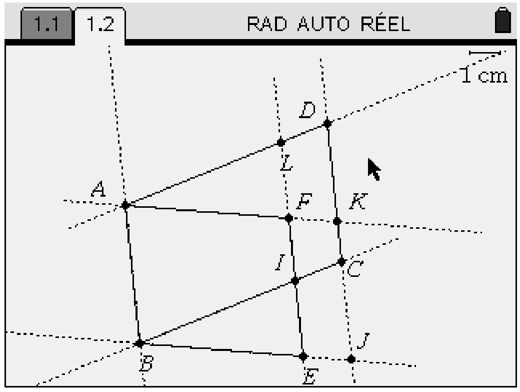
$ABCD$ et $ABEF$ sont deux parallélogrammes non aplatis. La droite (EF) coupe (BC) en I et (AD) en L. La droite (CD) coupe (BE) en J et (AF) en K. Montrer que B, D, F sont alignés (cas d'une diagonale commune : (BD) et (BF)) si et seulement si A, I, J le sont aussi. Donner de même une condition pour que A, C, E soient alignés (cas de l'autre diagonale commune : (AC) et (AE)).

a. Configuration de deux parallélogrammes accolés.

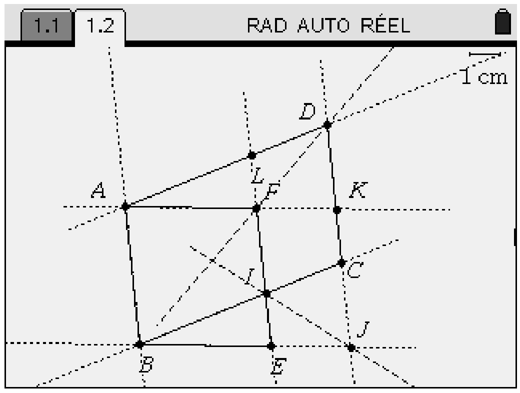
Ouvrir une nouvelle page **Graphiques & géométrie**. Créer quatre points A, B, C, E ainsi que le vecteur $\overrightarrow{BA}$. Construire les points D et F translatés respectifs de C et de E par la translation $t_{\overrightarrow{BA}}$. On obtient deux parallélogrammes ayant un côté commun $ABCD$ et $ABEF$. Une action sur l'un ou l'autre des points initiaux A, B, C ou E permettra de déformer à volonté la figure.



Créer en trait pointillé les droites qui supportent les côtés. Créer les points d'intersection I, J, K et L. La figure est pour l'instant « quelconque ». On remarque deux quadrilatères paraissant se correspondre par une translation, $DLFK$ et $CIEJ$, mais c'est la seule remarque significative. Il faudra la justifier.



Créer en trait tireté les droites (BD) et (IJ).
En déformant la figure, tenter d'aligner empiriquement les points B, D, F.
On dirait que lorsque B, D, F sont alignés, les points A, I, J le sont aussi. Un fait nouveau apparaît : maintenant, le quadrilatère $BIFA$ paraît être « homothétique » aux deux autres. Est-ce bien le cas ?



- Supposons d'abord que B, D, F soient alignés. Peut-on prouver « facilement » que $BIFA$ est homothétique à l'un des deux quadrilatères $DLFK$ ou $CIEJ$? Lequel des deux ? Pourquoi est-il aussi homothétique à l'autre quadrilatère ? Qu'est-ce qui prouve alors que A, I, J sont alignés ?
- Supposons maintenant que A, I, J soient alignés. Auquel des deux quadrilatères $DLFK$ ou $CIEJ$ le quadrilatère $BIFA$ est-il certainement homothétique ? Pourquoi l'est-il aussi à l'autre ? Qu'est-ce qui prouve alors que B, D, F sont alignés ?

Dans le cas où l'on suppose que B, D, F sont alignés, il est légitime d'envisager l'homothétie h de centre F qui transforme B en D. Il faut justifier que l'image par h de $BIFA$ est bien $DLFK$.
L'autre quadrilatère $CIEJ$ est image de $BIFA$ par la composée $t_{\overrightarrow{AB}} \circ h$ d'une homothétie et d'une translation, donc par une homothétie de même rapport que celui de h. De plus, h transforme I en L et $t_{\overrightarrow{AB}}$ renvoie L en I. Le point I est invariant, c'est le centre de l'homothétie composée, et l'alignement A, I, J en découle.

Réciproquement, dans le cas où l'on suppose que ce sont les points *A*, *I*, *J* qui sont alignés, il est légitime d'envisager l'homothétie *h'* de centre *I* qui transforme *A* en *J*. Il faut justifier que l'image par *h'* de *BIFA* est bien *CIEJ*. Le quadrilatère *DLFK* est image de *BIFA* par la composée $t_{\overrightarrow{BA}} \circ h'$ dont le centre est *F* car *h'* transforme *F* en *E* et $t_{\overrightarrow{BA}}$ renvoie *E* en *F*. L'alignement *B*, *F*, *D* en découle.

On note que les transformations en jeu ne sont pas les mêmes suivant l'hypothèse d'alignement retenue. En cela, l'étude directe et l'étude réciproque se distinguent.

Quant à l'alignement des points *A*, *E*, C, il est lié à l'alignement *B*, *K*, *L* et se traite de la même façon sans aucune nouveauté.

Remarque
Si le problème est ainsi posé, d'autres outils concurrencent l'outil des transformations. C'est le cas de l'outil de la géométrie analytique, dont l'usage peut être suggéré par la présence de parallélogrammes. Un repère adapté à l'étude de cette situation est par exemple le repère $\left(B\,;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$, dans lequel on peut noter $(a,\,b)$ les coordonnées du point *E*. Le lecteur pourra comparer les performances des deux outils.

5. Conclusion

Dans l'exercice tel qu'il est posé, le logiciel n'est d'aucune aide pour faire comprendre l'utilité des transformations *h* et $t_{\overrightarrow{NM}}$ dans la résolution du problème d'alignement. Un candidat présentant l'exercice devant un jury pouvait tout au plus construire une figure illustrant son propos et montrer que l'alignement *M*, *N*, *P* résiste au déplacement du point *N* sur (D_2).

Dans l'exercice reformulé, le logiciel a un rôle nettement plus important d'aide à la conjecture : il sert à mettre en évidence la distinction entre le cas général (deux parallélogrammes sans diagonale commune) et le cas particulier (deux parallélogrammes avec une diagonale commune) pour peu que l'enseignant attire l'attention sur l'évolution des trois quadrilatères *DLFK*, *CIEJ* et *BIFA* lorsqu'on déforme la figure. Deux d'entre eux sont toujours isométriques et se correspondent par translation. Le troisième est en général quelconque, et devient semblable aux deux autres dans le cas particulier. La pertinence d'une utilisation de la composée de deux transformations pour résoudre le problème d'alignement est peut être alors mieux visible.