Exponentialfunktioner och logaritmer

Tidigare i kurserna har du gått igenom potenslagarna, hur man räknar med potenser och potensfunktioner av typen $y = x^2$. En *potensfunktion* är en funktion som innefattar en potensberäkning där man håller exponenten konstant men varierar basen. Om man istället håller basen konstant och varierar exponenten så får man en *exponentialfunktion*. I kurs 1 träffade du på exponentialfunktioner av typen

$y = 100 \cdot 1{,}02^x$

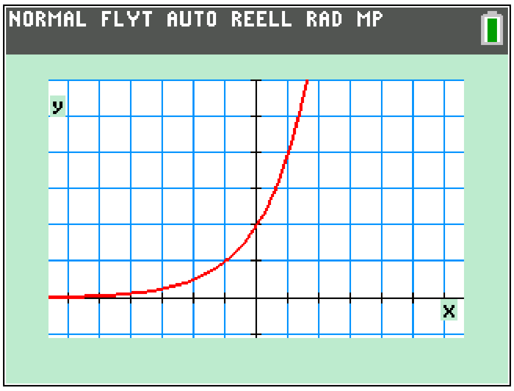
Då handlade det t.ex. om hur ett kapital på 100 kr utvecklas om det växer med 2 % varje år. Basen i det exponentiella uttrycket kallas för *förändringsfaktor*.

Ett samband av typen

$y = C \cdot a^x$

med den oberoende variabeln som exponent kallas alltså *exponentiellt*. Basen *a* kallas *förändringsfaktor*, och måste vara ett positivt tal. Koefficienten C bestämmer var grafen skär *y*-axeln och om kurvan pekar uppåt eller nedåt.

Vi plottar nu funktionen $y = 2 \cdot 2^x$.

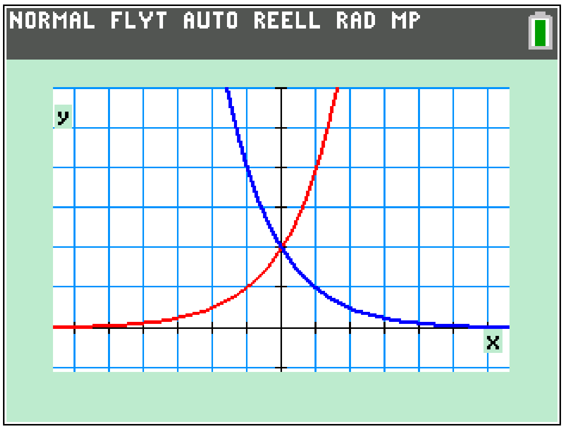


Vi ser att den växer hela tiden. För allt större *negativa* värden så går värdet mot 0.

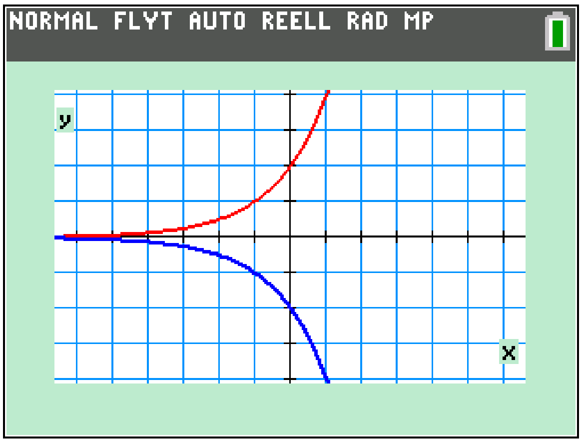
Om vi tar det inverterade värdet av basen, dvs. skriver funktionen som

$$y = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

får vi spegelbilden i *y*-axeln av kurvan $y = 2 \cdot 2^x$. Den funktionen är istället konstant avtagande.

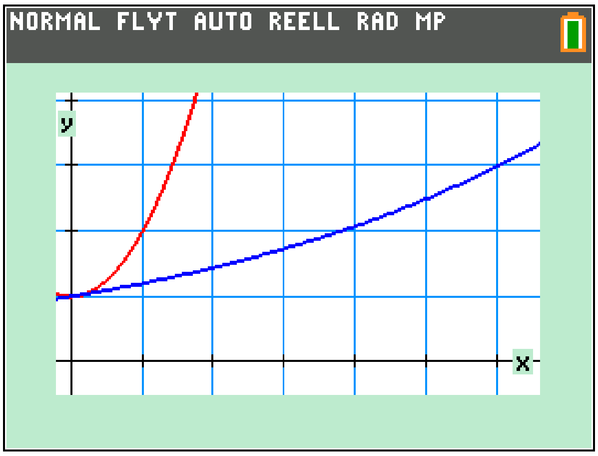


Om vi skriver funktionen som $y = -2 \cdot 2^x$ så får vi spegelbilden i *x*-axeln.



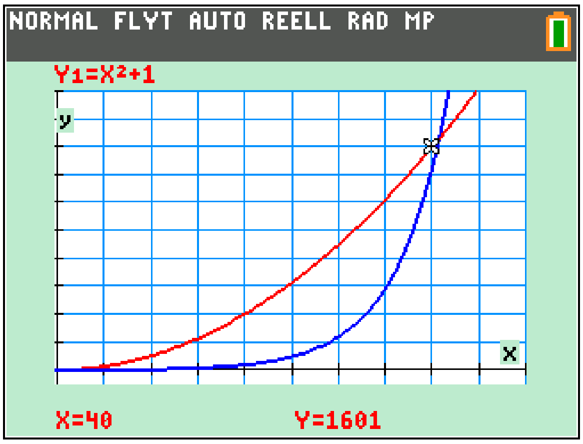
Har exponentialfunktioner någon speciell egenskap?

Plotta den funktionen $y = x^2 + 1$ och exponentialfunktionen $y = 1{,}2^x$ i samma fönster.



I början ser vi att $y = x^2 + 1$ växer ifrån exponentialfunktionen. För *x* = 5 så är *y*= 26 för potensfunktionen men ”bara” 2,49 för den andra.

Vi förstorar nu vårt fönster ordentligt.



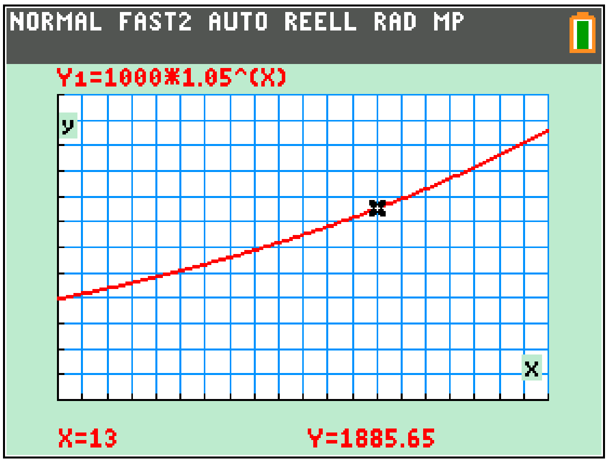
Det som händer är att exponentialfunktionen växer ifrån potensfunktionen. När *x* = 40 har de ungefär samma värde.

Detta är en egenskap hos alla exponentialfunktioner. De växer *alltid* ifrån potensfunktioner. För stora värden på *x* kan de växa obehagligt snabbt.

Om man investerar 1000 kronor till 5 % årsränta så kan sambandet mellan tiden och det kapital man har beskrivas med formeln

$$y = 400 \cdot 1{,}05^{x}$$

där *y* är de kapitalet *y* och *x* den tid i år som de stått inne. Räntan man får läggs till vid varje årsskifte och sedan har man det beloppet på kontot fram till nästa årsskifte. Man säger att *ränteperioden* är ett år, och att räntan *kapitaliseras* årligen.

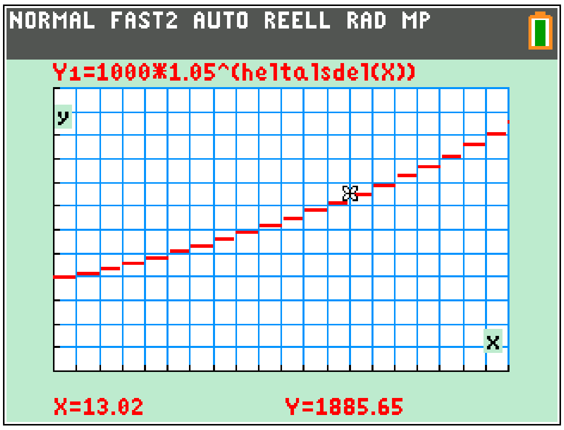


Eftersom kapitaliseringen sker vid årsskiftet ska man egentligen skriva sin funktion på ett annat sätt. Det samlade kapitalet stiger ju precis vid årsskiftet.

Man kan då använda funktionen heltalsdel, som finns i MATH-menyn under avdelningen NUM.

Du kan enkelt inkopiera den till inmatningsraden för funktioner.

Så här se då grafen ut. Funktionsvärdet hoppar upp ett snäpp precis vid årsskiftena.



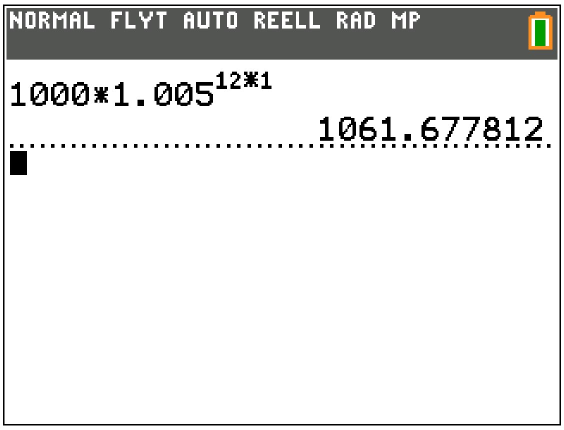
Hur ser då funktionen ut om kapitaliseringen istället sker varje månad, dvs. vi har 12 kapitaliseringar varje år? Vi ändar till 6 % årsränta för att göra beräkningarna enklare.

Man betalar då 6/12 =0,5 % ränta varje månad. Förändringsfaktorn blir 1,005 och då blir sambandet

$$y = 1000 \cdot 1{,}005^{12x}.$$

Om *x* är antalet år så motsvarar 12*x* antalet månader.)

Om vi nu beräknar vad kapitalet blir efter ett år (12 månader) får vi



Detta motsvarar en årsränta på ca 6,17 %.

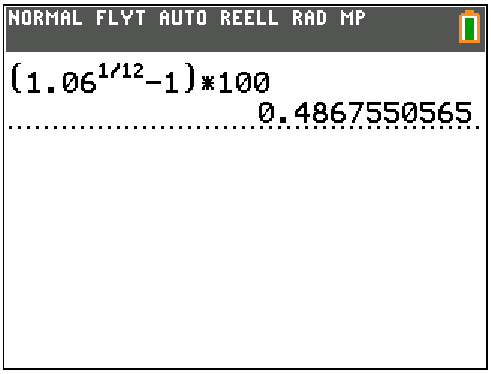
Helårsräntan är alltså *inte* 12 ggr större än månadsräntan.!

Hur stor ska då månadsräntan vara om man vill att den ska motsvara en helårsränta på 6 %? Om vi säger att den ska vara *x* % så kan man teckna ekvationen

$1000 \cdot (1 + x/100)^{12} = 1000 \cdot 1{,}06$

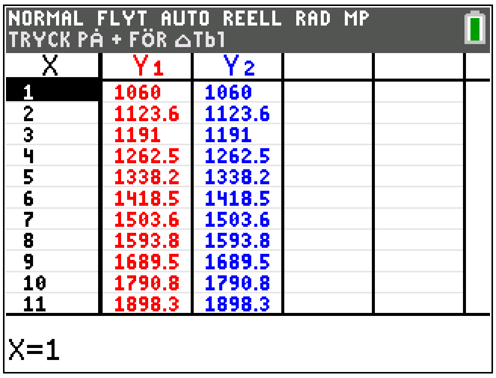
Om vi förenklar så får vi: $(1 + x/100) = 1{,}06^{1/12}$

Vi kan nu lösa ut *x*:



Vi ska alltså ha en månadsränta på 0,487 %, inte 0,5 %.

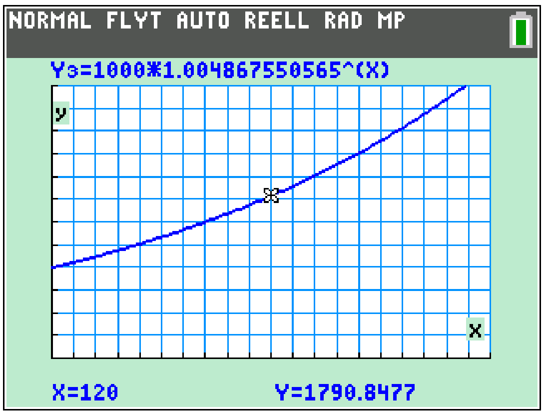
Om vi nu matar in våra exponentialfunktioner i editorn för funktioner ([Y=]) får vi exakt samma värden. X är antalet år. Med [2nd][TABLE] får vi en värdetabell.



X	Y1	Y2
1	1060	1060
2	1123.6	1123.6
3	1191	1191
4	1262.5	1262.5
5	1338.2	1338.2
6	1418.5	1418.5
7	1503.6	1503.6
8	1593.8	1593.8
9	1689.5	1689.5
10	1790.8	1790.8
11	1898.3	1898.3

Om vi ska plotta exponentialfunktionen där månadsräntan är den nyss beräknade får vi skriva

$y = 1000 \cdot 1{,}004867..^{x}$



Vi sätter in 1000 kronor på ett konto med 5 %: årsränta. Hur länge dröjer det innan kapitalet har fördubblats?

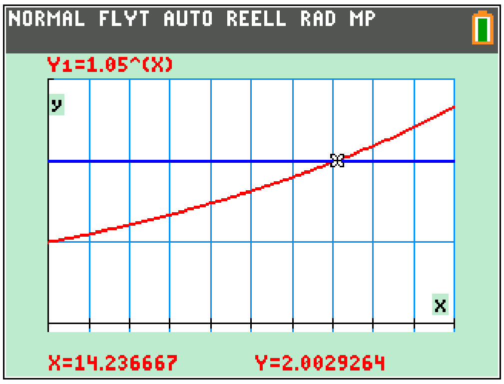
Efter x år att ha $1000 \cdot 1{,}05^{x}$ kronor på kontot. när har kapitalet vuxit till 2000 kronor.

Vi kan teckna en ekvation:

$1000 \cdot 1{,}05^{x} = 2000$ som förenklas till

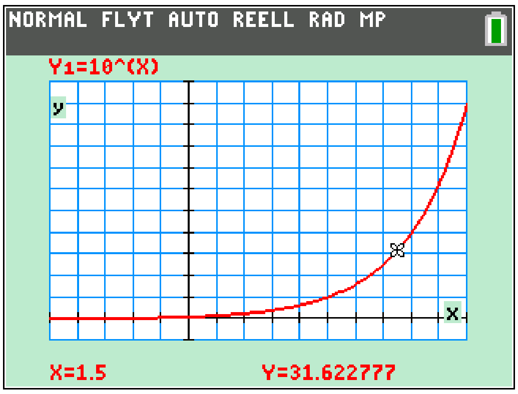
$1{,}05^{x} = 2$

1,05 ska alltså upphöjas till något så att resultatet blir 2. Vi kan naturligtvis plotta och spåra oss fram:



Vi har här lagt in linjen *y*=2 och spårat oss fram till skärningen. Finns det något annat sätt? Jo, man använder sig av *logaritmer*.

Plotta funktionen $y = 10^{x}$.

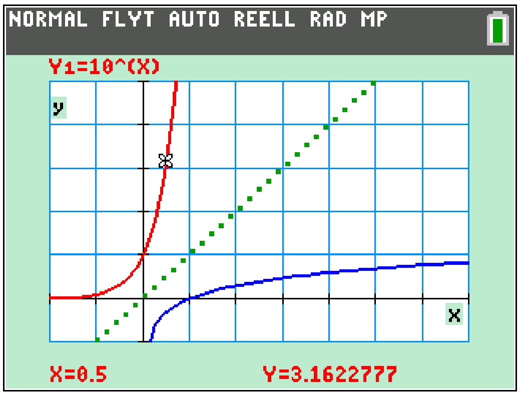


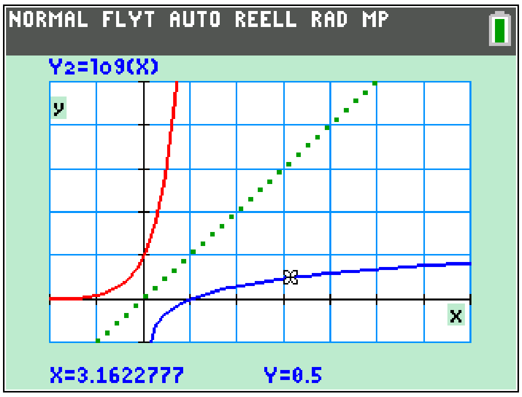
Vi ser att värdet på y då *x* = 1,5 är ca 31,6. Det betyder att $31{,}6 = 10^{1{,}5}$. Talet 31,6 kan alltså skrivas som en tiopotens där exponenten kallas *logaritm*. Logaritmen för 31,6 är alltså ca 1,5.

Oftast använder man sig av tiologaritmer, som betecknas lg, och då kan definitionen för logaritm uttryckas så här:

$\lg x$ är det tal som 10 ska upphöjas till för att man ska få *x*. Detta betyder att $10^{\lg x} = x$.

Prova nu att plotta $y = 10^x$ och $y = \lg x$ i samma koordinatsystem.

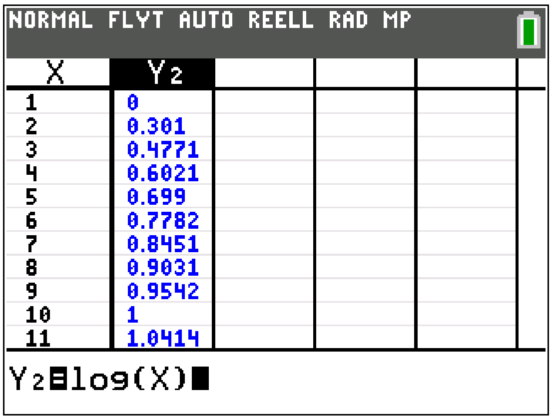




Graferna är varandras spegelbilder i linjen *y* = *x*. För exponentialfunktionen är värdet 3,16 när *x* = 0,5 och för logaritmfunktionen är det tvärtom. De är varandras *inverser*.

Vi ser också att logaritmer bara definierade för positiva tal. För *x* =1 är logaritmen 0.

Om du spårar i den logaritmiska kurvan kan du se logaritmen för talet. Du kan även se värdena i en tabell om du trycker på [2nd][TABLE].


NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP

X	Y2
1	0
2	0.301
3	0.4771
4	0.6021
5	0.699
6	0.7782
7	0.8451
8	0.9031
9	0.9542
10	1
11	1.0414

Y2=log(X)

Tillbaka till den ekvation vi fick i problemet med kapitalet som fördubblades. Vi kom fram till ekvationen $1{,}05^x = 2$

Nu skriver vi i vänsterledet $\lg(1{,}05^x)$ och då måste vi göra likadant i högerledet. Vi får alltså ekvationen

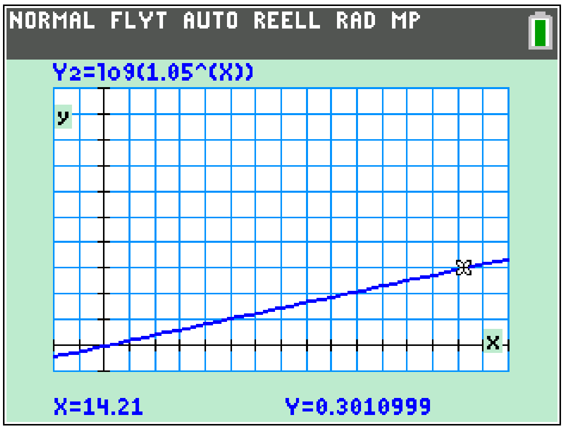
$$\lg(1{,}05^x) = \lg 2$$

Tredje logaritmlagen ($\lg a^x = x \cdot \lg a$) ger då

$$x \cdot \lg 1{,}05 = \lg 2$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}05} \approx \frac{0{,}301}{0{,}0212} \approx 14{,}2$$

Om vi plottar $y = \lg 1{,}05^x$ och spårar i plottningen ser vi att när *x* är ≈14,21 är y ≈ 0,301, som är just lg 2.



Några exempel på logaritmiska modeller

Här en uppgift från en lärobok:

Ljudnivån, *L*, från en högtalare med en viss ljudinställning avtar med avståndet *d* från högtalaren enligt sambandet

$$L = k - 10\lg(d)$$

där ljudnivån *L* mätes i dB, avståndet mäts i meter och *k* är en konstant. På ett avstånd på 5,0 meter från högtalaren mättes ljudnivån till 51 dB.

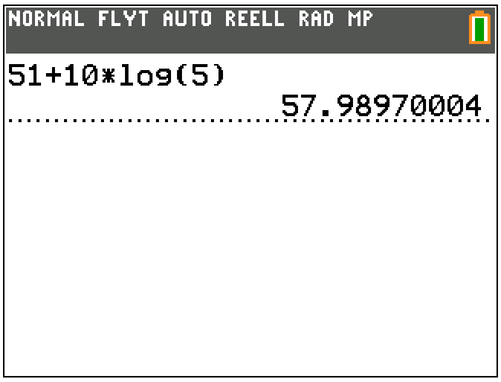
a) Bestäm det avstånd från högtalaren där ljudnivån är 55 dB.

b) Vad händer med ljudnivån om avståndet till högtalaren fördubblas?

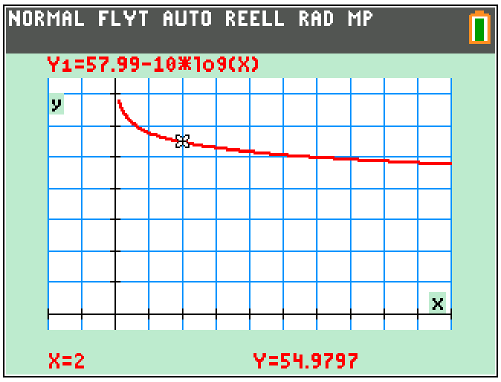
a) Vi sätter in de värden vi vet i uttrycket:

$$51 = k - 10 \cdot \lg(5)$$

Vi beräknar sedan k:



Nu kan vi plotta sambandet:



Om vi spårar kan vi se att på avståndet 2 m är ljudnivån ca 55 decibel.

Vi kan lösa detta algebraiskt. Vi får ekvationen

$$55 = 58 - 10 \cdot \lg(d)$$

$$\lg(d) = \frac{3}{10}$$

Logaritmen för ett tal ska alltså vara 0,3. Vilket tal kan det vara? Du kommer ihåg definitionen av logaritm:

$\lg x$ är det tal som 10 ska upphöjas till för att man ska få x. Detta betyder att $10^{\lg x} = x$.

Vi får:

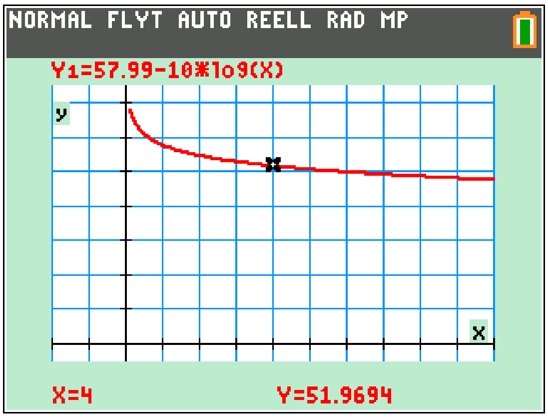
$$10^{\lg r} = r = 10^{0.3}$$

Vi får att $r \approx 2{,}0$ m.

b) Om avståndet fördubblas ska vi alltså beräkna hur mycket ljudnivån sjunker.

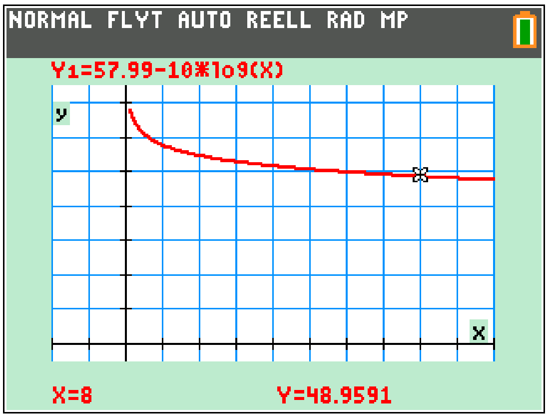
På 2 m avstånd är ljudnivån 55 decibel. Vad händer om vi ökar till det dubbla, dvs 4 decibel?

Vi tittar på grafen:



Det verkar sjunka med ca 3 decibel.

Vi dubblar igen från 4 m till 8 m:



Det sjunker fortfarande med ca 3 decibel.

Kan vi räkna ut att det blir så:

$$L = k - 10\lg(d) - \left(k - 10\lg(2d)\right) =$$
$$= k - 10\lg(d) - k + 10(\lg 2 + \lg d) =$$
$$-10\lg(d) + 10\lg(2) + 10\lg(d) = 10\lg(2) \approx 3$$

Stämmer med vårt antagande.

Vid en fördubbling av avståndet minskar alltså ljudnivån med 3 decibel. Att det är så inses också av följande beräkningar.