EP 016 - 2007 : Minimum de consommation

Auteurs du corrigé : Alain Soléan, France et Michel Villiaumey **TI-Nspire/TI-Nspire™ CAS**

Avertissement *: ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

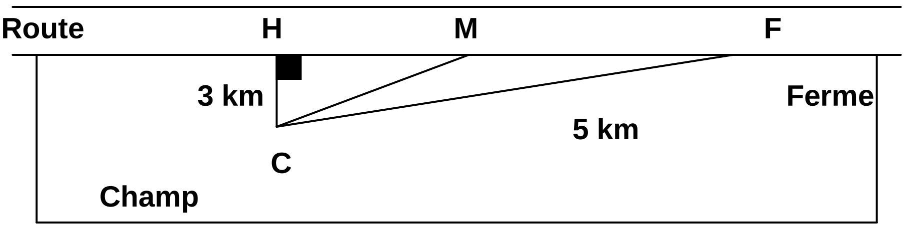
Fichier associé : EP016_2007_MinimumConsommation.tns

1. Le sujet

Sujet 016 de l'épreuve pratique 2007 – Modélisation d'une situation géométrique

Enoncé

Un agriculteur doit se rendre du point C de son champ à sa ferme F. Il se trouve à 3 kilomètres de la route qui mène à la ferme, et à 5 kilomètres de cette dernière, comme indiqué sur la figure suivante :



On considère que :

- Les points H, M et F sont alignés sur le bord de la route ;
- $CH = 3$; $CF = 5$;
- La droite (CH) est perpendiculaire à la droite (HF) ;

On note x la distance HM.

Le fermier cherche à économiser sa consommation de carburant. Il sait que sa consommation est :

- D'un litre de carburant par kilomètre parcouru sur la route ;
- De k litres de carburant par kilomètre parcouru à travers champ (le facteur k, avec $k \geq 1$, dépend de l'état du terrain : plus le terrain est accidenté plus k est grand).

On admettra pour réaliser l'étude expérimentale que la fonction « consommation de carburant », notée f_k est définie par : pour tout réel x de $[0 ; 4]$,

$$f_k(x) = k\sqrt{x^2 + 9} + 4 - x.$$

I Étude expérimentale

1. Recherche de la consommation minimale pour $k = 2$

On cherche dans cette question à savoir en quel point M il faut rejoindre la route, dans le cas où la consommation à travers champ est le double de celle sur la route.

a) Tracer sur la calculatrice ou le tableur, en choisissant une fenêtre adaptée, la représentation graphique de la fonction f_2.

b) Déterminer graphiquement ou à l'aide d'une table de valeurs un encadrement à 10^{-1} près de la distance HM en kilomètres correspondant la valeur minimale de la consommation de carburant.

2. Détermination graphique de la valeur limite k_0

Le fermier, qui a un grand sens pratique, pense que si k est inférieur à une certaine valeur limite k_0, il n'est pas utile de rejoindre la route et que couper directement à travers champ n'est pas plus cher ! on cherche à vérifier cette affirmation.

a) Tracer sur la calculatrice ou le tableur, en choisissant une fenêtre adaptée, les représentations graphiques des fonctions f_k pour :

$$k \in \{1{,}1 ; 1{,}2 ; 1{,}3 ; 1{,}4 ; 1{,}5 ; 1{,}6 ; 1{,}7 ; 1{,}8 ; 1{,}9 ; 2\}.$$

b) Calculer $f_k(4)$ et interpréter cette valeur dans le cadre du problème.

c) Observer, expliquer et conjecturer la valeur k_0 au-dessous de laquelle il est inutile de chercher à rejoindre la route.

II Détermination de la fonction « consommation »

1. Exprimer CM en fonction de x.

2. Démontrer que, pour tout réel x de $[0 ; 4]$ $f_k(x) = k\sqrt{x^2+9} + 4 - x$.

Production demandée

Partie I :
- **1. b)** Donner la valeur de la distance en kilomètres, correspondant à la valeur minimale de la consommation de carburant.
- **2. b)** et **2. c)** Donner la valeur exacte de $f_k(4)$, interprétation. Donner la valeur expérimentale de k_0 et expliquer.

Partie II :
- Rédaction des justifications demandées.

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Réaliser une représentation graphique en choisissant une fenêtre adaptée ;
  - Réaliser un tableau de valeurs en choisissant un pas adapté afin de déterminer un minimum ;
  - Représenter, sur un même écran, une famille de courbes représentatives.
- **Compétences mathématiques**
  - Mettre en équation un problème géométrique donné.

2. Corrigé

Tous les écrans de ce document sont obtenus à partir de la calculatrice.

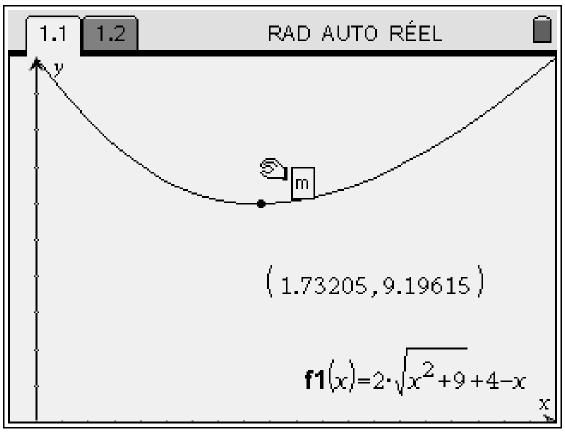
I - Étude expérimentale

1. a) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.
Ecrire l'équation de la fonction dans la ligne de saisie :
$f1(x) = 2\sqrt{x^2+9} + 4 - x$.

Définir la **Fenêtre** ci-contre :
Xmin = -0.2 ; **Xmax** = 4 ; **Ymin** = 8 ; **Ymax** = 10

b) Placer un **Point sur** la courbe, le déplacer ; lorsque le point atteint le minimum on obtient l'écran ci-contre.

La valeur de HM correspondant à la consommation minimale est environ 1,7 kilomètres.
L'encadrement demandé est donc $1,7 < x < 1,8$.



2. On se propose de tracer les courbes des fonctions f_k et de faire afficher $f_k(4)$ puis de déterminer la valeur de k_0.

Ouvrir une nouvelle page **Graphiques et géométrie**
Régler la fenêtre :
Xmin = 0 ; **Xmax** = 5 ; **Ymin** = 4 ; **Ymax** = 10

Définir les fonctions $f_2(x) = \boldsymbol{k}.\sqrt{x^2+9}+4-x$

et $f_3(x) = 5\,\boldsymbol{k}$.

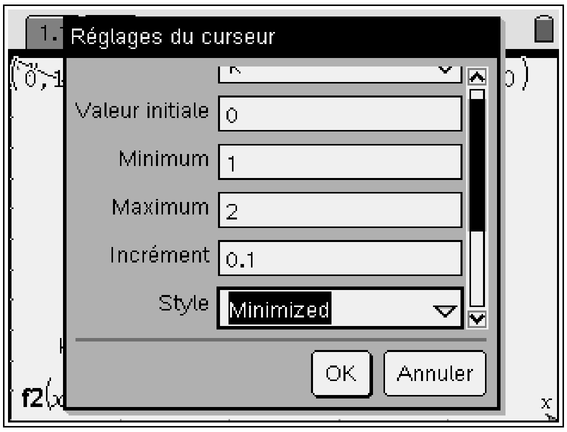
Construction d'un curseur nommé ***k*** , ***k*** variant dans :
{1,1 ;1,2 ;1,3 ;1,4 ;1,5 ;1,6 ;1,7 ;1,8 ;1,9 ;2} :

Menu 1 : Actions A : Contrôle curseur

Taper ctrl menu 1 : Réglages

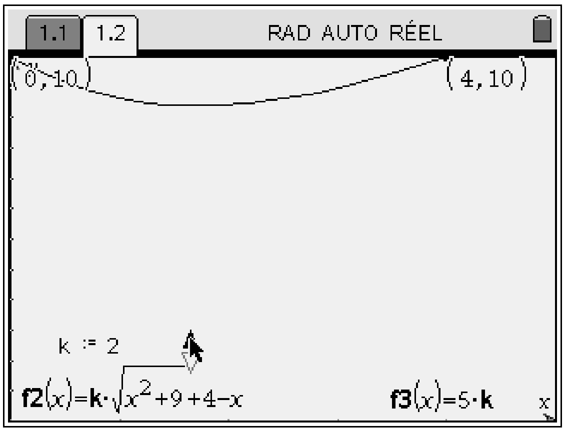
Compléter la fenêtre ci-contre, valider

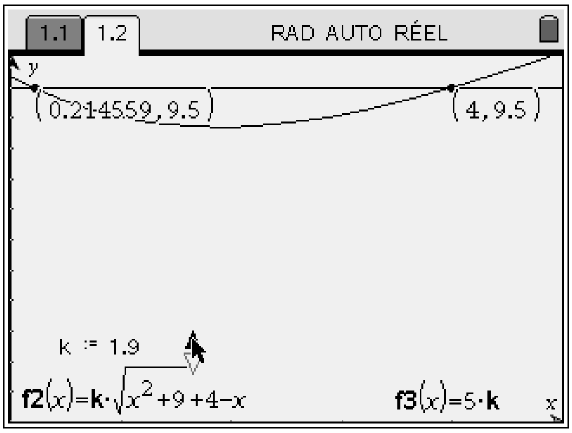
Afficher les **Points d'intersection** des deux courbes.

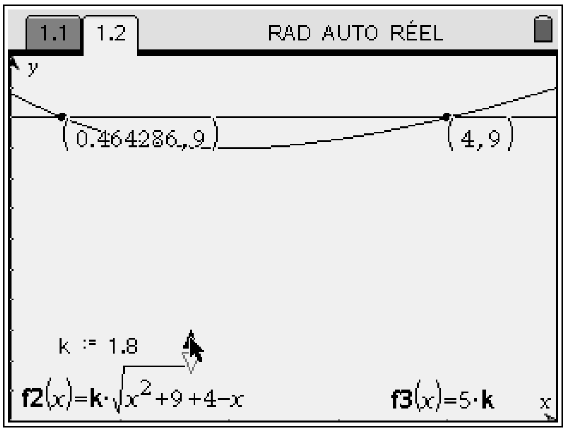


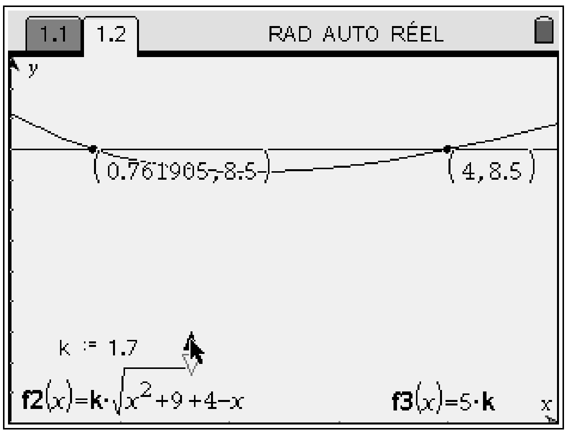
Remarque : le point d'intersection situé à droite a pour coordonnées
(4 ; f_k (4)).

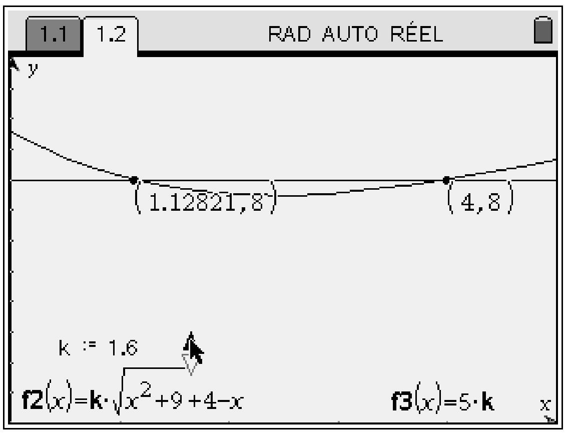
Faire varier le curseur en cliquant sut les flèches.

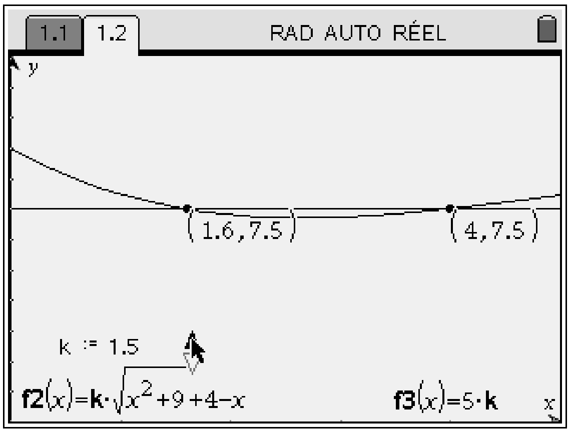


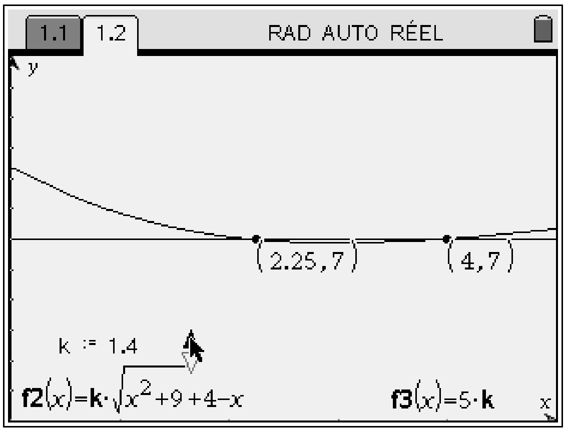


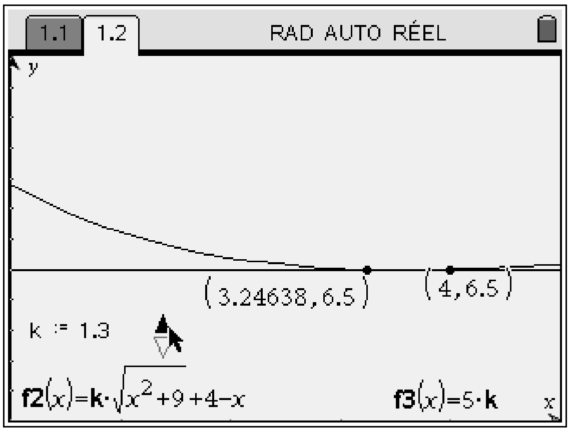


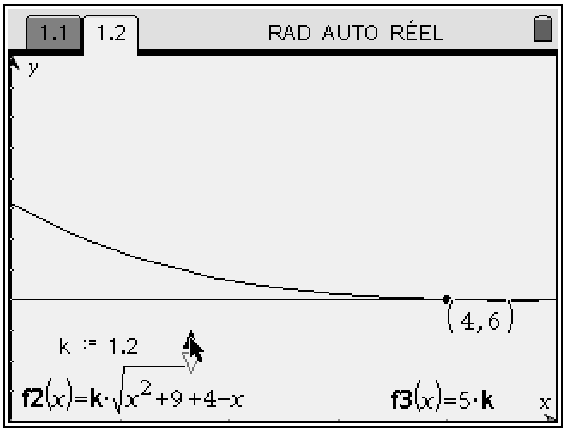








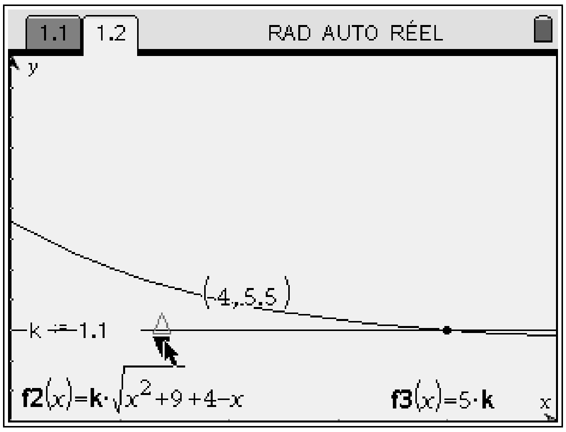




Les écrans donnant les courbes pour les différentes valeurs de k montrent l'existence de deux points d'intersection pour $k \geq 1{,}3$ donc d'un minimum de consommation pour $x < 4$.

Pour $k \leq 1{,}2$, on obtient un seul point d'intersection en $x = 4$.
Donc aucun minimum de consommation en passant par la route.

On en déduit l'existence d'une valeur $k_0 \in \,]1{,}2\,;\,1{,}3[$ en dessous de laquelle il est inutile de passer par la route pour rejoindre la ferme.



II – Détermination de la fonction « consommation »

1. Le triangle CHM est rectangle en H, donc $CH^2 + HM^2 = CM^2$ d'où $3^2 + x^2 = CM^2$,

$$CM = \sqrt{x^2 + 9}.$$

2. D'après l'énoncé, la consommation f_k est égale à $k.CM + (4 - HM)$ d'où :

$$f_k(x) = k\sqrt{x^2 + 9} + 4 - x.$$

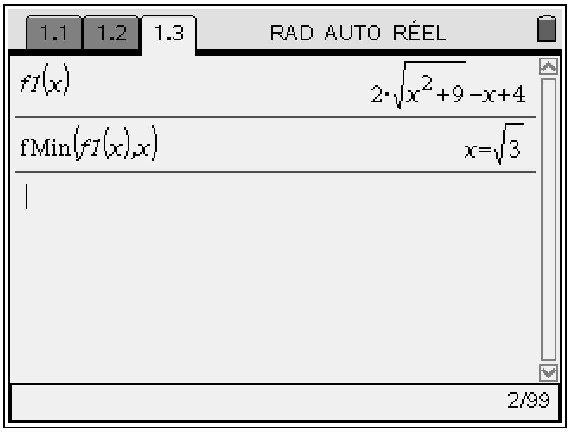
3. Pour aller plus loin

Pour la question **1.b)** du **I**, on peut obtenir la valeur exacte de *HM*.

Ouvrir une page **Calculs**.

Demander la valeur de x correspondant au minimum de la fonction *f1*.

Le résultat confirme la valeur approchée obtenue graphiquement.



Pour la question **2.c)** du **I**, on peut obtenir la valeur exacte de k_0.
Définir la fonction $f_k(x) = m\sqrt{x^2+9} + 4 - x$.

Remarque : k étant défini dans la page graphique, il faut changer le nom du paramètre d'où le choix de m. On peut aussi ouvrir la page Calculs dans une nouvelle activité, ce qui permet de garder le même nom de variable.

Demander la valeur de x correspondant au minimum de cette fonction, choisir la solution positive puis chercher pour quelle(s) valeur(s) de m, $m \geq 1$, ce minimum est dans l'intervalle [0 ; 4].

On trouve $k_0 = \frac{5}{4}$, ce qui confirme la conclusion de l'étude graphique.