Exercice 2

Pondichéry, avril 2008
5 points

Partie A

On suppose connu les résultats suivants :

- Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C.
  Alors $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \frac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}\right)\ (2\pi)$
- Soit z un nombre complexe et soit θ un réel : $z = e^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta\ \ (2\pi)$

Démonstration de cours : Démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que
$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i, z_B = 1 - i\sqrt{3},\ z_c = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

1°) a) Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes $z_A, z_B,\ z_c$ et z_D.
  b) Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$?
  c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2°) On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par :
  $E = r(A)$ et $F = r(C)$.
  a) Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précédent ?
  b) Donner l'écriture complexe de r.
  c) Déterminer l'affixe du point E.

SOLUTION

Partie A

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ avec $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ tel que $M \neq \Omega$

$$M' = r(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha \quad (2\pi) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z - \omega| = |z' - \omega| \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha \quad (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha \quad (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha} \quad \text{d'après le prérequis}$$

On a donc $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$. Cette égalité est encore vérifiée si $M = \Omega$, c'est−à−dire si $z = \omega$.

Partie B

1°) a) Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes $z_A, z_B,\ z_C$ et z_D.

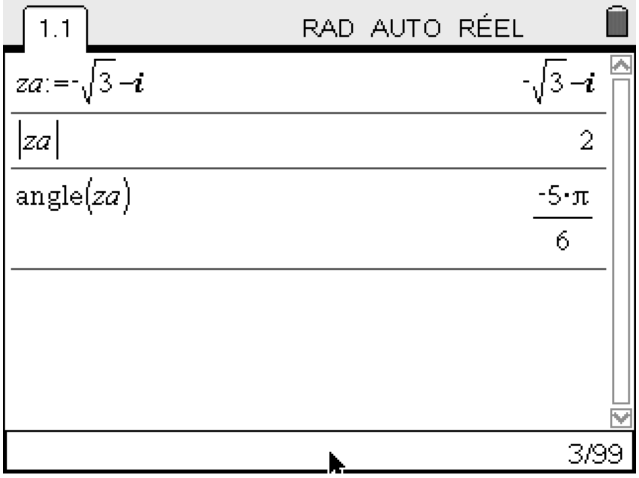
On a $z_A = -\sqrt{3} - i$.

Donc $|z_A| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$.

Ainsi $z_A = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2e^{-\frac{5i\pi}{6}}$, donc

$Arg(z_A) = -\frac{5\pi}{6} \quad (2\pi)$

Conclusion : $|z_A| = 2$ et $Arg(z_A) = -\frac{5\pi}{6} \quad (2\pi)$



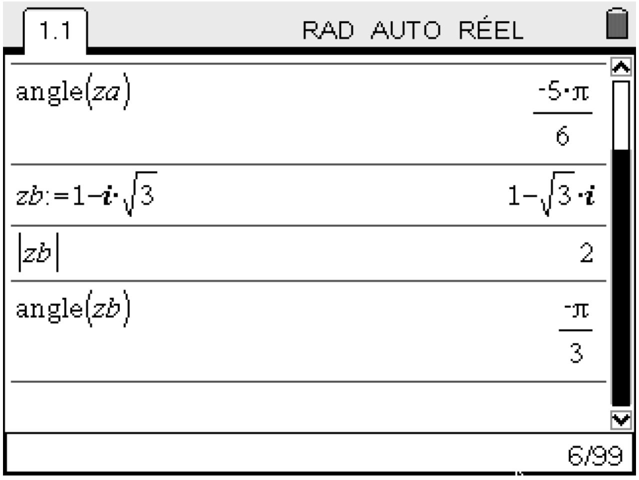
On a $z_B = 1 - i\sqrt{3}$.

Donc $|z_B| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

Ainsi $z_B = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$, donc

$Arg(z_B) = -\frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$

Conclusion : $|z_B| = 2$ et $Arg(z_B) = -\frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$



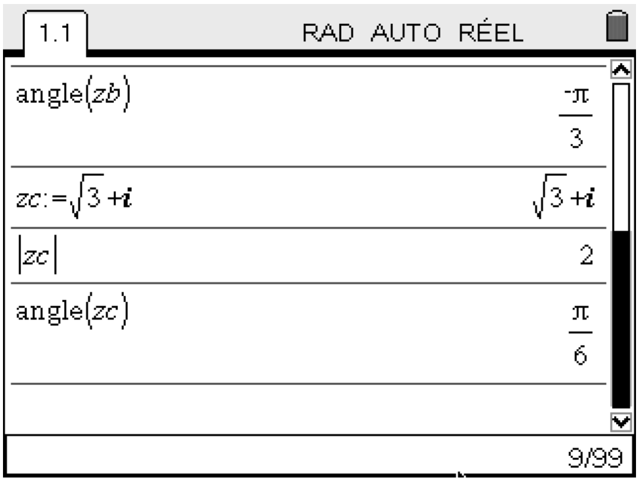
On a $z_C = \sqrt{3} + i$.

Donc $|z_C| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$.

Ainsi $z_C = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$, donc

$Arg(z_C) = \frac{\pi}{6} \quad (2\pi)$

Conclusion : $|z_C| = 2$ et $Arg(z_C) = \frac{\pi}{6} \quad (2\pi)$



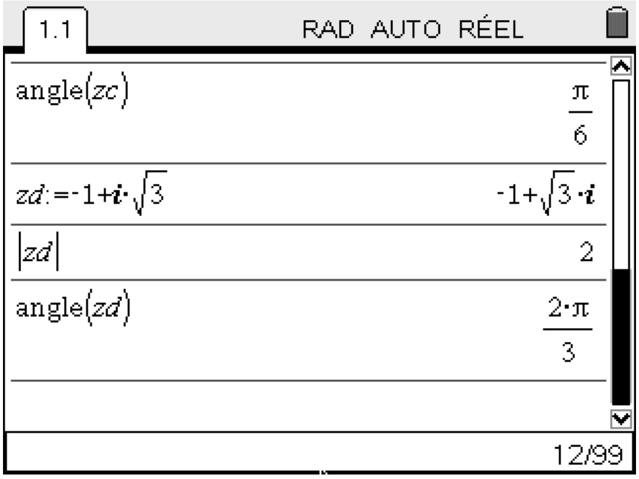
On a $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

Donc $|z_D| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

Ainsi $z_D = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{\frac{i2\pi}{3}}$, donc

$Arg(z_D) = \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$

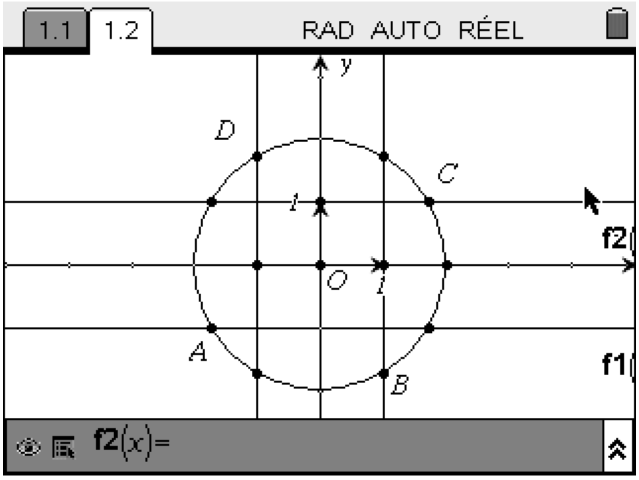
Conclusion : $|z_D| = 2$ et $Arg(z_D) = \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$



1°) b) Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$?

Etant donné que $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2$ alors $OA = OB = OC = OD = 2$. Donc les points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

On sait que $z_A = -\sqrt{3} - i$, donc A appartient à la droite d'équation $y = -1$. Cette droite coupe de cercle de centre O et de rayon 2 en deux points. A est le point d'intersection d'abscisse négative.



$z_C = \sqrt{3} + i$, donc C est le point d'intersection d'abscisse positive du cercle de centre O et de rayon 2 avec la droite d'équation $y = 1$.

$z_B = 1 - i\sqrt{3}$ donc B appartient à la droite d'équation $x = 1$. Cette droite coupe de cercle de centre O et de rayon 2 en deux points. B est le point d'intersection d'ordonnée négative.

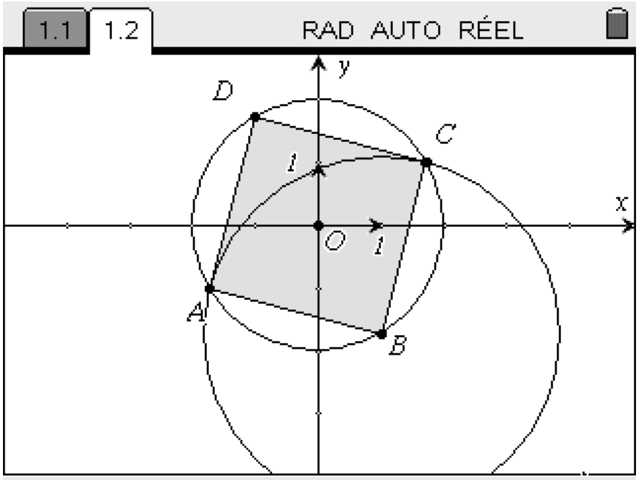
$z_D = -1 + i\sqrt{3}$ donc D appartient à la droite d'équation $x = -1$. Cette droite coupe de cercle de centre O et de rayon 2 en deux points. D est le point d'intersection d'ordonnée positive.

1°) c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On remarque que $z_D = iz_C$ puis $z_A = iz_D$ et $z_B = iz_A$ donc D, A et B sont les images respectives de C, D et A par R. Donc $ABCD$ est un carré.

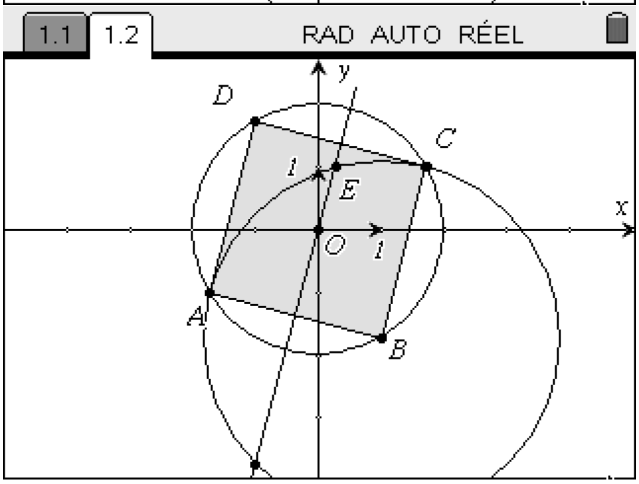
2°) a) Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précédent ?

E est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ donc $BE = BA$. E appartient au cercle C' de centre B et de rayon BA.

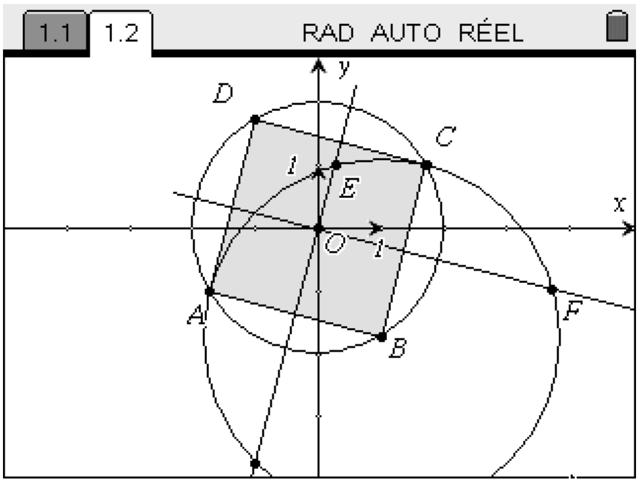


Le triangle BAE est isocèle en B.
De plus $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE}\right) = -\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$. Le triangle BAE est donc équilatéral, donc $EA = EB$, ce qui prouve que E appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

On trace Δ la médiatrice du segment $[AB]$.
Δ coupe C' en deux points.
E est le point de $\Delta \cap C'$ qui vérifie $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE}\right) = -\frac{\pi}{3}\ \ (2\pi)$



F est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ donc $BF = BC$. F appartient au cercle C' de centre B et de rayon BC (qui est aussi le cercle de centre B et de rayon BA).
En reprenant le raisonnement précédent, on trace Δ' la médiatrice du segment $[CB]$.
Δ' coupe C' en deux points.
F est le point de $\Delta \cap C'$ qui vérifie $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF}\right) = -\frac{\pi}{3}\ \ (2\pi)$



2°) b) Donner l'écriture complexe de r.

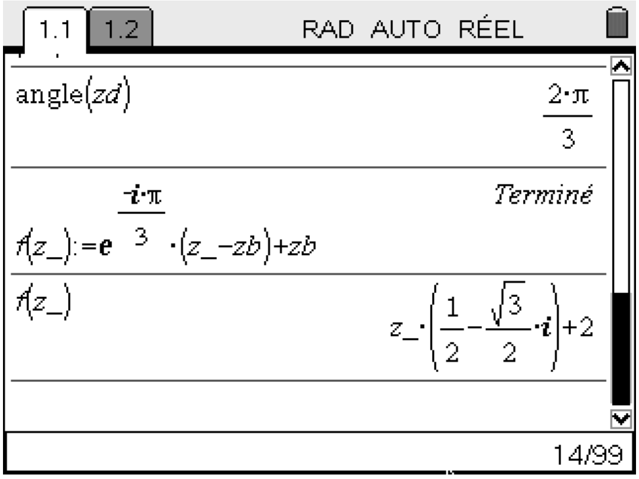
La rotation r de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ a pour écriture complexe : $z' = e^{-\frac{i\pi}{3}}(z - z_B) + z_B$

donc $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - 1 + i\sqrt{3}\right) + 1 - i\sqrt{3}$

On peut développer cette expression, mais ce n'est pas demandé :

$$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) z + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1 + i\sqrt{3}\right) + 1 - i\sqrt{3}$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) z + 2$$



2°) c) Déterminer l'affixe du point E.

On sait que $E = r(A)$ avec $z_A = -\sqrt{3} - i$.

Donc $z_E = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3} - i - 1 + i\sqrt{3}\right) + 1 - i\sqrt{3}$

$$z_E = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3} - 1 + i\left(\sqrt{3} - 1\right)\right) + 1 - i\sqrt{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{3}{2}i + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - i\sqrt{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right)$$

Donc $z_E = 2 - \sqrt{3} + i$