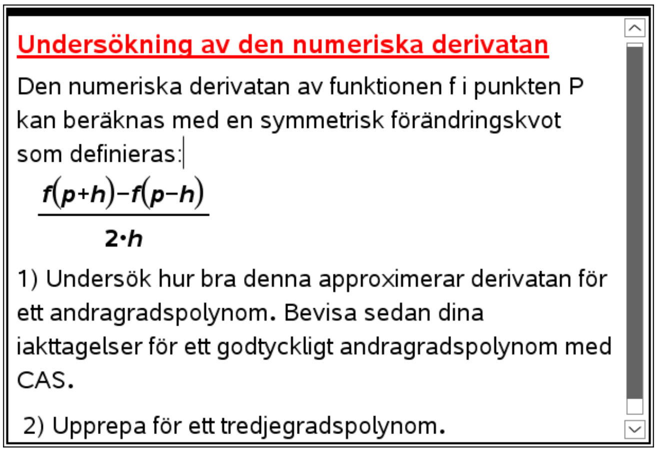
Den symmetriska differenskvoten

Målet med denna aktivitet är att du ska förstå hur numerisk derivering fungerar och också hur väl det fungerar genom att jämföra de värden som du får med hjälp av den numeriska derivatan med dem du får med derivatan själv. Undersökningen behandlar andragrads- och tredjegradsfunktioner men kan lätt utvidgas till andra typer av funktioner.

Öppna filen *Den symmetriska differenskvoten.tns* där en konstruktion finns gjord. I filen finns andra-gradsfunktionen $f1(x)=x^2-3x-1$ ritad. Tangenten är ritad i en punkt *P* på grafen och dessutom en rät linje, en *sekant*, genom punkterna på grafen med *x*-koordinaterna $x = p + h$ och $x = p - h$. Dessa båda linjers lutningar jämförs i övningen. I bilden är sekanten streckad och tangenten heldragen. Värdet på *h* är för tillfället ca 0,7.

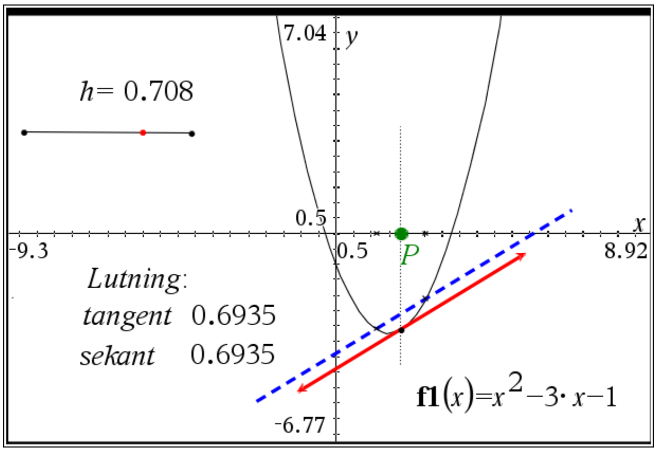

Undersökning av den numeriska derivatan

Den numeriska derivatan av funktionen f i punkten P kan beräknas med en symmetrisk förändringskvot som definieras:

$$\frac{f(p+h)-f(p-h)}{2\cdot h}$$

1) Undersök hur bra denna approximerar derivatan för ett andragradspolynom. Bevisa sedan dina iakttagelser för ett godtyckligt andragradspolynom med CAS.

2) Upprepa för ett tredjegradspolynom.



Några steg på vägen

- Flytta punkten *P* på *x*-axeln och studera vad som händer med de båda linjernas lutningar.
- Variera storleken på h genom att flytta punkten på skjutreglaget, sträckan under *h*-värdet. Vad händer med sekanten och tangenten? Hur förändras lutningarna?
- Ändra funktionen. Byt t ex till $f1(x)=x^2-2x-3$. Upprepa undersökningarna enligt ovan.
- För att bevisa det du observerat så infogar du en Räknare-sida eller en anteckningssida och *defini-erar* en allmänt andragradsfunktion, dvs. med godtyckliga koefficienter *a*, *b* och *c* så här:

  $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$
- *Definiera* derivatan av funktionen *f(x)* som *derivata(x)*.
- Bestäm *derivata(x)* och jämför med den symme-triska differenskvoten runt punkten med *x* = p. Vilken slutsats kan du dra?
- Återvänd till grafsidan och redigera funktionen *f1(x)* så att du får en funktion av *tredje* graden, t ex $f1(x)=x^3-x-1$. Upprepa de undersökningar du gjorde under de två första punkterna ovan, dvs. flytta *P* och variera *h*. Vad observerar du nu?
- Återvänd till Räknar-sidan och definiera om *f(x)* och *derivata(x).* Hur stor är skillnaden mellan vär-det på den symmetriska förändringskvoten och derivatan?

Läraranvisning

Undersökningen i appen Grafer visar att den symmetriska förändringskvoten överensstämmer med derivatan i intervallets mittpunkt oberoende av läget av *P* och oberoende av storleken på *h*.

För att bevisa det infogas en anteckningssida och definitionerna enligt elevinstruktionen utförs. Använd **Define** eller **:=** för att definiera de båda funktionerna.

Derivatamallen $\frac{d()}{dx}$ infogas från matematikmallarna i verktygslådan. Klicka på boksymbolen 📖.

Beräkning av derivatan och den symmetriska differenskvoten ger samma resultat. För en andragradsfunktion är alltså derivatan och den symmetriska differenskvoten lika.

Vi definierar funktionen: $f(x):=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ ▸ *Klar*

Vi definierar derivatan: $\mathbf{derivata}(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Klar*

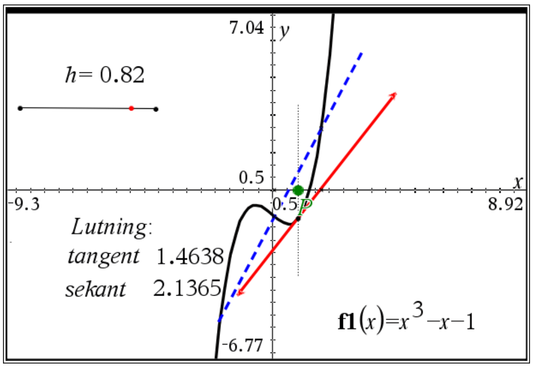
Derivatan i punkten *p*: $\mathbf{derivata}(p)$ ▸ $2\cdot a\cdot p+b$

Vi beräknar den *symmetriska differenskvoten* i punkten *p:*

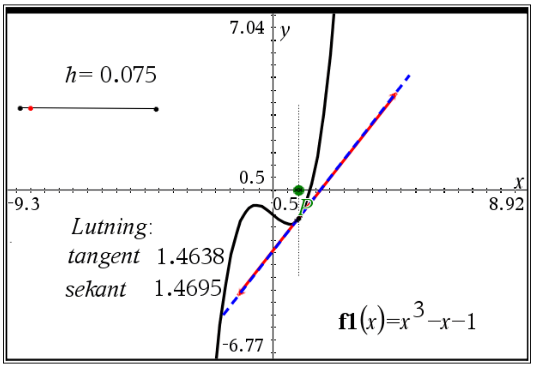
$\frac{f(p+h)-f(p-h)}{2\cdot h}$ ▸ $2\cdot a\cdot p+b$ ⚠

Vi ser att derivatan och den symmetriska differenskvoten är lika!

Funktionen ändras till $f1(x)=x^3-x-1$. Se nedan!



Som framgår av bilden ovan är överensstämmelsen dålig för detta värde på *h*.



En minskning av *h* gör att approximationen blir betydligt bättre. Vid numerisk derivering är *h* förinställt till 0,001, dvs. betydligt mindre än ovan.

Vi gör nu samma symboliska beräkningar med en tredjegradsfunktion. Du kan använda den gamla sidan där du definierat en andragradsfunktionen och skriva om den till en allmän tredjegradsfunktion.

Vi definierar nu om funktionen:

$f(x):=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ ▸ *Klar*

Vi definierar derivatan: $\mathbf{derivata}(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Klar*

Derivatan i punkten *p*:

$\mathbf{derivata}(p)$ ▸ $3\cdot a\cdot p^2+2\cdot b\cdot p+c$

Vi beräknar den *symmetriska differenskvoten* i punkten *p:*

$\frac{f(p+h)-f(p-h)}{2\cdot h}$ ▸ $a\cdot(h^2+3\cdot p^2)+2\cdot b\cdot p+c$ ⚠

Vi tittar nu på differensen mellan den symmetriska differenskvoten och derivatan.

Som framgår av beräkningen nedan beror differensen av koefficienten för tredjegradstermen och av *h*. För det värde på *h* som används av många räknare är differensen en miljontedel av koefficienten för x^3.

Differensen beräknas:

$a\cdot(h^2+3\cdot p^2)+2\cdot b\cdot p+c-(3\cdot a\cdot p^2+2\cdot b\cdot p+c)$

▸ $a\cdot h^2$

$a\cdot h^2|h=0.001$ ▸ $1.\mathrm{E}{-6}\cdot a$

TI-Nspire har en inbyggd funktion för att beräkna den symmetriska differenskvoten med olika värden på *h*. Du hittar denna funktion under *Analys/Numeriska beräkningar*.

Här har beräknat den numeriska derivatan för olika värden på *h*.

$\frac{d}{dx}(x^3)$ ▸ $3\cdot x^2$ $\frac{d}{dx}(x^3)|x=2$ ▸ 12

centralDiff$(x^3,x=2,0.1)$ ▸ 12.01

centralDiff$(x^3,x=2,0.01)$ ▸ 12.0001

centralDiff$(x^3,x=2,0.001)$ ▸ 12.000001

$\frac{d}{dx}(5\cdot x^3)|x=2$ ▸ 60

centralDiff$(5x^3,x=2,0.001)$ ▸ 60.000005