# Tredjegradsfunktioner och deras tangenter

## Mål för aktiviteten

Att upptäcka en intressant egenskap hos tredjegradsfunktioner genom att rita tangenter, upptäcka ett fenomen, utvidga undersökningen och att slutligen bevisa att det upptäckta gäller generellt.

## Nödvändiga förkunskaper

Känna till derivatans egenskaper. Kunna teckna ekvationen för en tangent. Ha god erfarenhet av att använda TI-Nspire: kunna placera punkter på en given linje, konstruera en linje vinkelrät mot en given linje, bestämma skärningspunkter och kunna rita tangenter.

## Uppgift

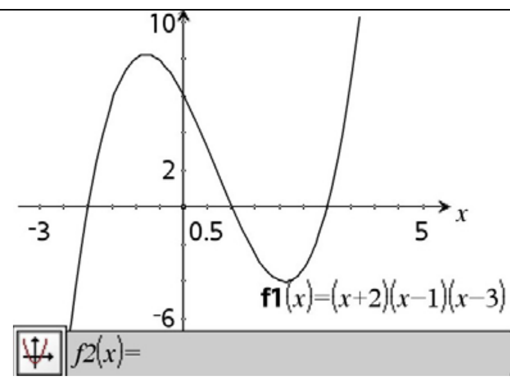
Definiera ett tredjegradspolynom som har tre nollställen, gärna heltalsvärden. Rita en tangent till funktionsgrafen och studera om och var den skär x-axeln. För vissa tangeringspunkter kommer tangenten att skära x-axeln i ett av nollställena. Finns det något mönster för när detta inträffar? Undersök! Är det du observerat generellt? Bevisa! Vi bortser från de fall att tangenten ritas i själva skärningspunkten med x-axeln.

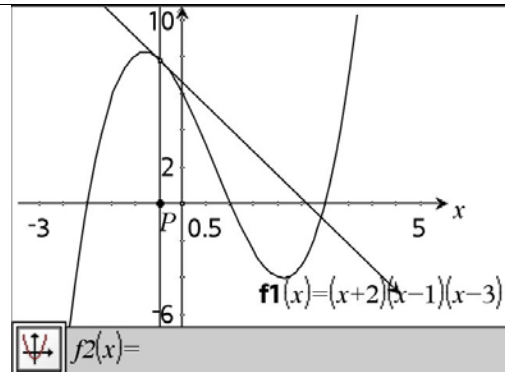
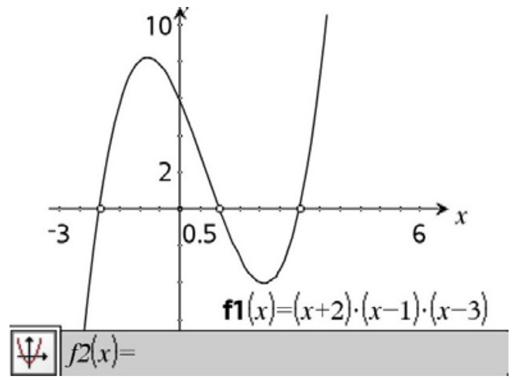
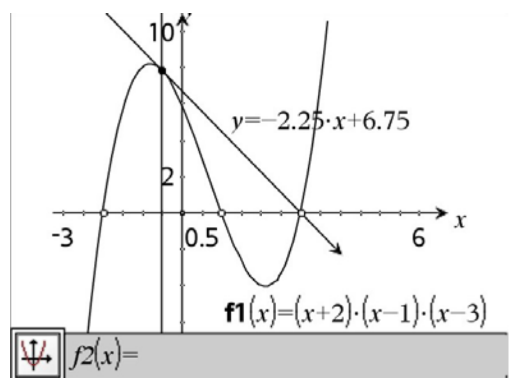
## Genomförande

Skicka filen ” Aktivitet9_TangentTill3grad_CAS student_SV.tns” till elevernas räknare. I denna fil finns steg för steg anvisning till eleverna för att genomföra undersökningen. Handhavandet av de moment, som beskrivs under ”Nödvändiga förkunskaper”, är dock inte beskrivna i detalj.

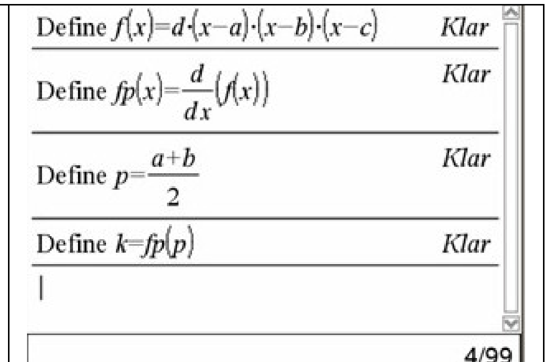
## Lärarstöd

En fullständig lösning till uppgiften finns i ”Aktivitet9_TangentTill3grad_CAS_lösning_SV.tns”. Innehållet i denna redovisas översiktligt nedan med kommentarer.

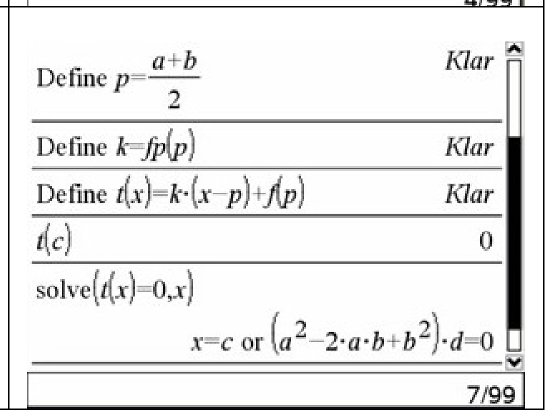
| | |
|---|---|
| Eleverna öppnar en sida med Grafer och Geometri. Därefter definieras en tredje-gradsfunktion med tre nollställen t ex $f1(x)=(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$.<br>Koordinatsystemet justeras så att grafens intressanta delar blir tydligt synliga.<br>En punkt placeras på x-axeln och döps till P (*Punkt på*, skriv sedan P direkt). Från denna ritas en linje vinkelrät mot x-axeln (*Vinkelrät*). |  |

| | |
|---|---|
| Skärningspunkten mellan linjen och grafen bestäms (*Skärningspunkt*). Tangenten ritas i skärningspunkten mellan grafen och linjen (*Tangent*). Flytta punkten P på x-axeln och studera tangentens förflyttning. Uppmana eleverna att undersöka de lägen då tangenten skär i ett av nollställena. Var finns då tangeringspunkten med utgångspunkt från de båda andra nollställena? |  |
| Eleverna går nu över till del 2 av undersökningen. Först öppnar de en ny sida med Grafer & Geometri och bläddrar fram f1(x) i inmatningsraden och trycker enter för att få fram grafen.<br>Först bestäms nollställena (*Skärningspunkt,* markera grafen och x-axeln). Ändra markörernas utseenden för de tre punkterna (*Attribut*).<br>Konstruera mittpunktsnormalen till den sträcka som förbinder de båda vänstra nollställena x = -2 och x = 1 (*Konstruktion-Mittpunktsnormal* och klicka på punkterna). |  |
| Bestäm skärningspunkten mellan mittpunktsnormalen och grafen (*Skärningspunkt*).<br>Rita tangenten i skärningspunkten (*Tangent*) och ta fram ekvationen för tangenten (K*oordinater och ekvationer*). Se bilden.<br>Upprepa detta för de båda andra paren av nollställen. Se nedan till vänster.<br>Redigera i nästa steg *f1(x)* så att andra tredjegradsfunktioner ritas. Se exempel på ändring i bilden nedan till höger.<br>Nu är det dags för steg 3 – att bevisa! |  |

Öppna ett nytt problem med Räknare.
Definiera funktionen *f(x)* och dess derivata *fp(x).* Namnvalet är naturligtvis godtyckligt.
Döp tangeringspunktens x-koordinat till p, dvs mittpunkten mellan två nollställen och definiera denna.
Döp lutningen hos tangenten till k och definiera denna.
Se bilden intill.




Döp tangentens ekvation till t(x) och definiera denna.
Bestäm t(c). Allt väl – värdet blir 0. Därmed är beviset klart.
Ett annat sätt att utföra slutsteget är att använda *Lös*. Detta har också genomförts intill. Observera svaret! Det finns en alternativ lösning. Tänk efter vad den innebär.




## *Extra (för den "duktiga" eleven)*

Undersök för ett godtyckligt tredjegradspolynom och en linje som skär grafen i tre punkter om motsvarande gäller för denna linjes skärningar och tangenten i mittpunkten mellan skärningspunkterna.

*Kommentarer:*

Bilden till vänster nedan visar upptäcktsfasen. Till höger visas undersökningsfasen där linjen har ändrats. Enklast och elegantast sker detta genom att dra i en av skärningspunkterna med grafen och du får en dynamisk förändring. Kvarstår verifieringsfasen där CAS-delen används för beviset. Denna redovisas inte här.

För konstruktionen behövs de fetmarkerade punkterna på x-axeln. Dessa är framtagna med *Vinkelrät* (mot x-axeln) och genom skärningspunkterna mellan linjen och tredjegradskurvan.