Etude d'une loi de Poisson (ou exponentielle) avec le TInspire

Soit X une variable aléatoire. On suppose que X suit une loi de Poisson (on dit aussi loi exponentielle) de paramètre $\lambda = 5$. (On note aussi $X \sim P(5)$)

1°) Déterminer la loi de probabilité de X.

2°) Déterminer l'expression de F, fonction de répartition de X puis représenter graphiquement F.

3°) Calculer l'espérance de X.

4°) Calculer l'écart type de X.

1°) Déterminer la loi de probabilité de X.

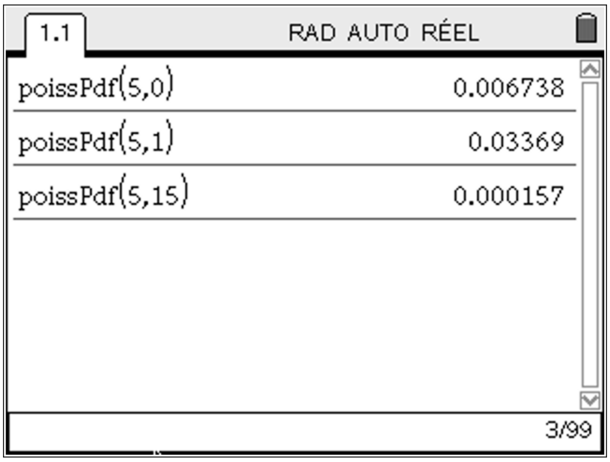
X est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson (ou loi exponentielle) de paramètre $\lambda = 5$.

La TI-*n*spire permet de calculer directement les valeurs de $p(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $(k \in \mathbb{N})$ et de dresser une partie de la loi de probabilité de X :

La valeur de $p(X = k)$ est obtenue

- Soit en tapant directement la commande poissPdf$(5, k)$.
- Soit en tapant (menu) **Probabilité | Distributions | Poisson DdP** et en complétant la boite de dialogue.

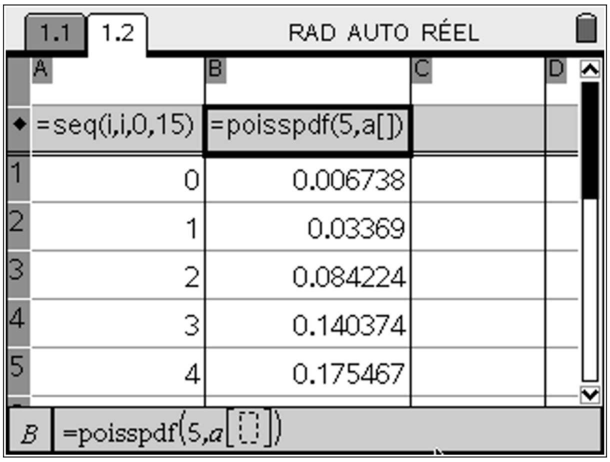
poissPdf$(5, \mathbf{0})$ correspond à $p(X = \mathbf{0})$
poissPdf$(5, \mathbf{1})$ correspond à $p(X = \mathbf{1})$
…
poissPdf$(5, \mathbf{15})$ correspond à $p(X = \mathbf{15})$



On peut aussi afficher toutes ces valeurs directement dans le tableur, ce qui nous donnera une partie de la loi de X :

Dans la colonne A on entre $= \mathbf{seq}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}, \mathbf{0}, \mathbf{10})$ pour avoir toutes les valeurs de 0 à 10.

Dans la colonne B on entre $= \mathbf{poissPdf}(\mathbf{5}, \boldsymbol{a}[\ ])$

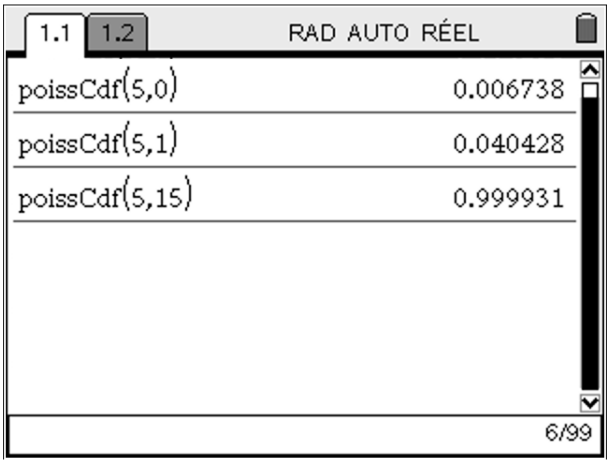


2°) Déterminer l'expression de *F*, la fonction de répartition de *X* puis représenter graphiquement *F*.

Pour calculer une valeur de la fonction de répartition de X, c'est-à-dire $p(X \leq k)$ on peut :

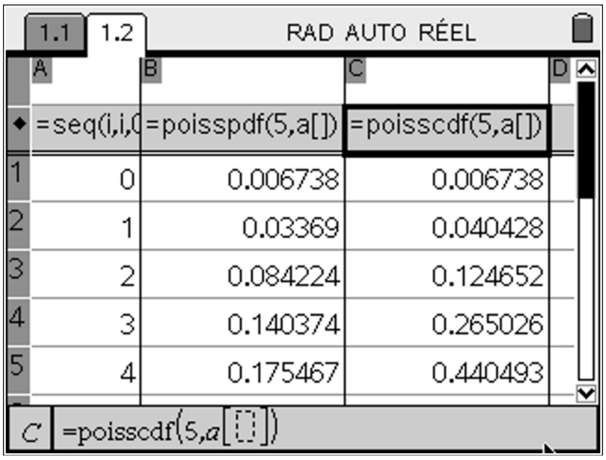
- Soit taper directement la commande poissCdf$(5, k)$.
- Soit trouver la commande en tapant menu **Probabilité | Distributions | Poisson FdR** et en complétant la boite de dialogue.

$p(X \leq \mathbf{0})$ correspond à $=$ poissCdf$(5, \mathbf{0})$
$p(X \leq \mathbf{1})$ correspond à $=$ poissCdf$(5, \mathbf{1})$
…
$p(X \leq \mathbf{15})$ correspond à $=$ poissCdf$(5, \mathbf{15})$



On peut compléter note feuille de calcul en entrant dans la colonne C :

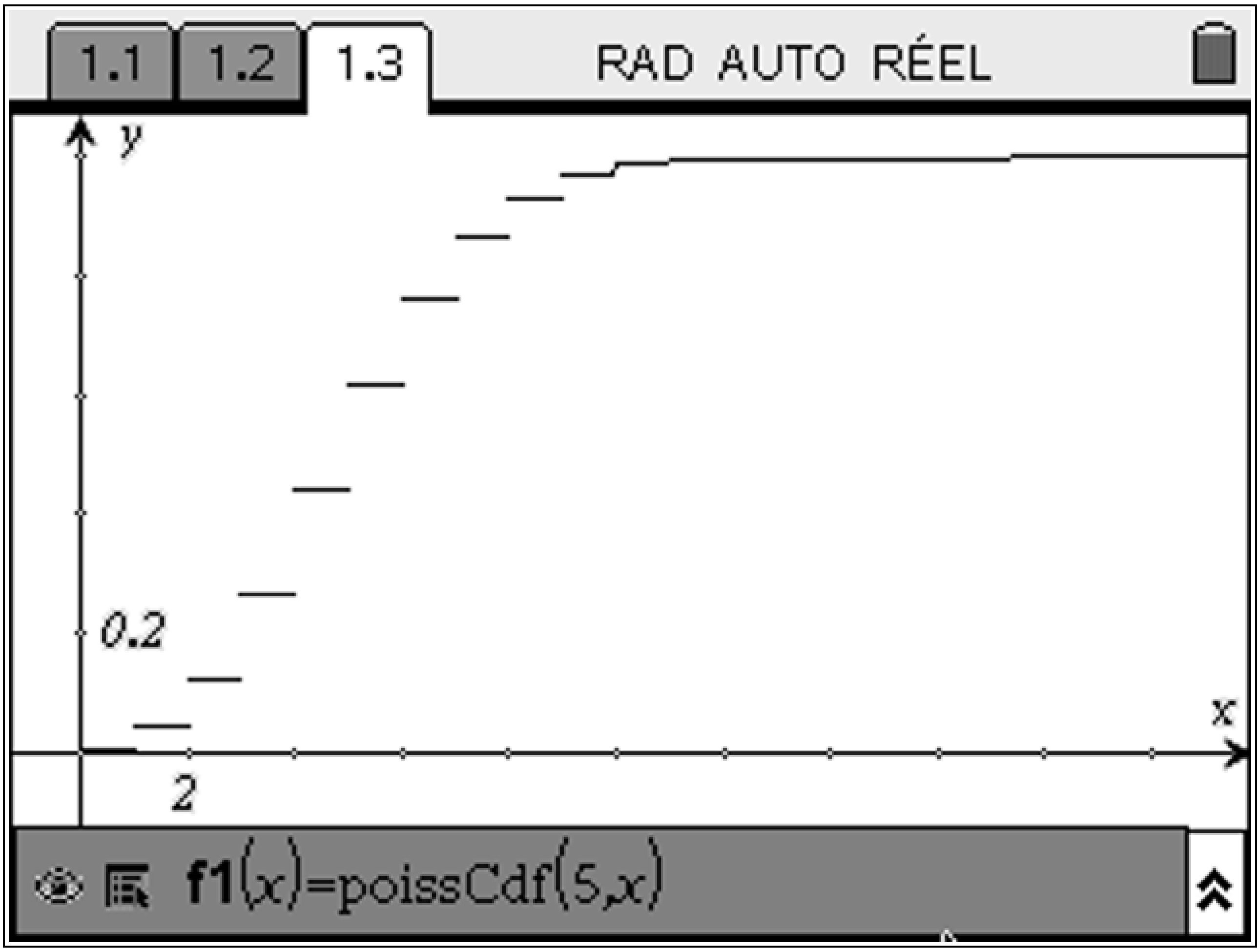
$= \mathbf{poissCdf}(\mathbf{5}, \boldsymbol{a}[\ ])$



On peut aussi calculer $p(a \leq X \leq b)$, par exemple si on souhaite obtenir la valeur de $p(2 \leq X \leq 6)$ on entre $\mathbf{poissCdf}(\mathbf{5}, \mathbf{2}, \mathbf{6})$:

poissCdf(5,2,6) 0.721756

Représentation graphique de la fonction de répartition F.



COMPLEMENT

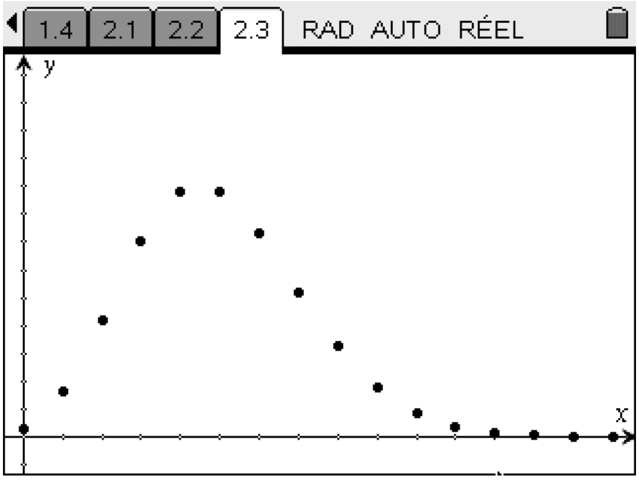
Il peut être intéressant de représenter graphiquement le nuage de points $(k, p(X = k))$ pour visualiser graphiquement la convergence de la loi de Poisson vers la loi normale.

En reprenant la loi de X obtenue dans la feuille de calcul précédente, on nomme x et y respectivement les colonnes A et B, puis dans une nouvelle feuille Graphique & Géométrie on affiche le nuage de points (x, y).

1.4 2.1 2.2 2.3 RAD AUTO RÉEL

	A x	B y	C
◆	=seq(i,i,0,15)	=poisspdf(5,a[])	=poisscdf(5,a[
1	0	0.006738	0.00673
2	1	0.03369	0.04042
3	2	0.084224	0.12465
4	3	0.140374	0.26502
5	4	0.175467	0.44049
6	5	0.175467	0.61596

B y:=poisspdf(5,a[ ])



Convergence vers la loi normale

Afin de visualiser la convergence de la loi de Poisson vers la loi normale il faut modifier un peu la feuille de calculs précédente et préparer la feuille de Géométrie comme précédemment :

=seq(i,i,0,500)

=poisspdf('lambda,a[ ])

	A x	B y	C	D	E
◆	=seq(i,i,0,500)	=poisspdf(lambda,a[])			
1	0	0.000045	lambda	10	
2	1	0.000454	maximum	0.12511	
3	2	0.00227			
4	3	0.007567			
5	4	0.018917			
6	5	0.037833			
7	6	0.063055			
8	7	0.090079			
9	8	0.112599			
10	9	0.12511			
11	10	0.12511			
12	11	0.113736			

Stocké dans ***lambda***

=max(b[ ])

Stocké dans ***maximum***

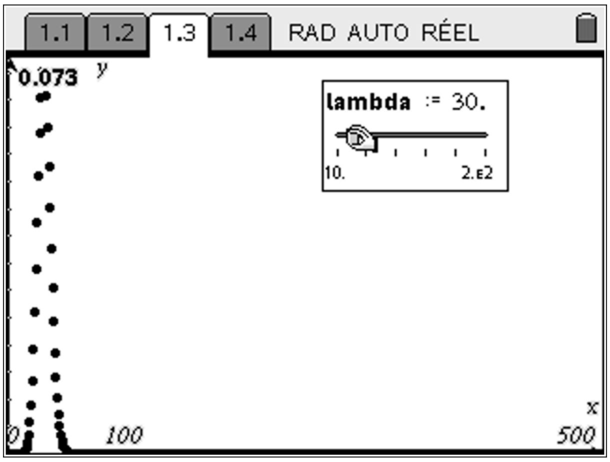
Pour modifier les valeurs de $\boldsymbol{lambda}$ sur le graphique, il faut :

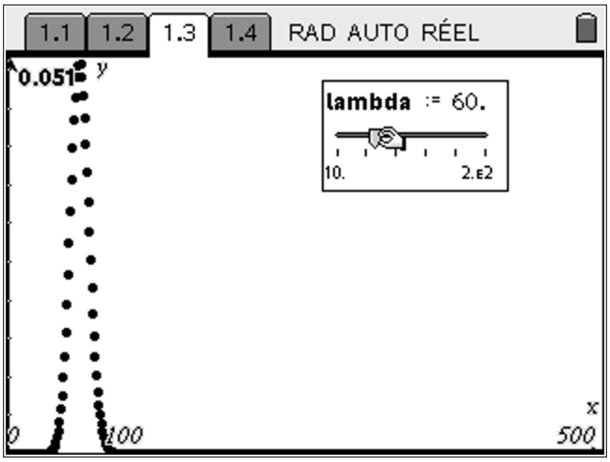
- insérer un curseur (on a choisit 10 pour valeur minimale, 10 pour l'incrémentation et 200 pour valeur maximale de $\boldsymbol{lambda}$)

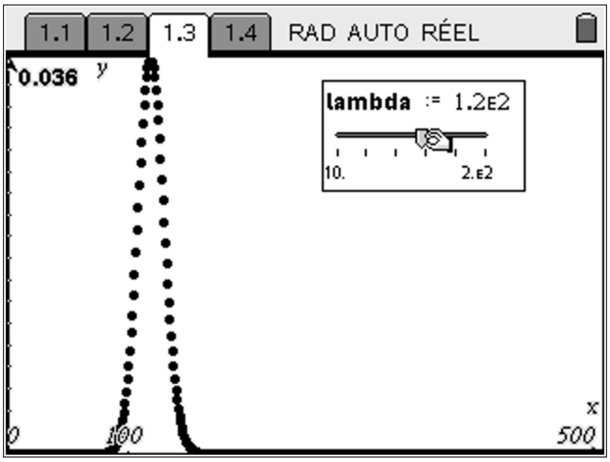
Puis pour modifier automatiquement l'échelle du graphique, il faut :

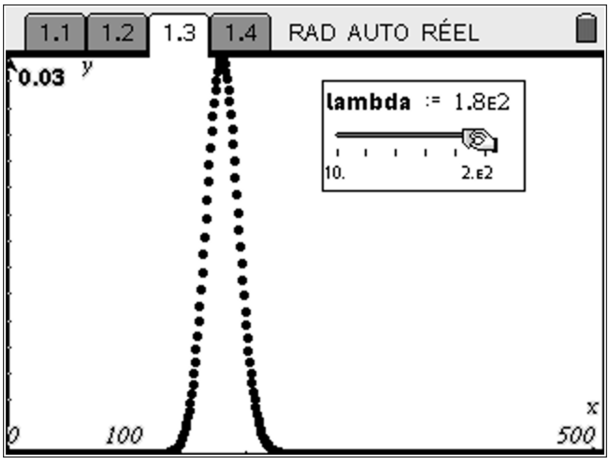
- Afficher les valeurs extrêmes des axes (menu **| Affichage | Afficher les valeurs extrêmes des axes**)
- Lier la valeur maximale de y à la variable $\boldsymbol{maximum}$
- Entrer respectivement -1 et 500 pour valeur minimale et maximale de x.
- Entrer 0 pour valeur minimale de y.

Pour incrémenter les valeurs de $\boldsymbol{lambda}$ de 10 en 10, il faut utiliser la flèche de direction ➔









On remarque que la loi de Poisson converge vers une loi normale.

On sait d'après le cours que lorsque $\lambda > 15$ alors $P(\lambda)$ est proche de $N(\lambda, \sqrt{\lambda})$. Appelons Y cette loi normale.

On va représenter graphiquement les 2 nuages de points suivants :

Nuage n°1 : $(k, p(X = k))$ (nuage précédemment)

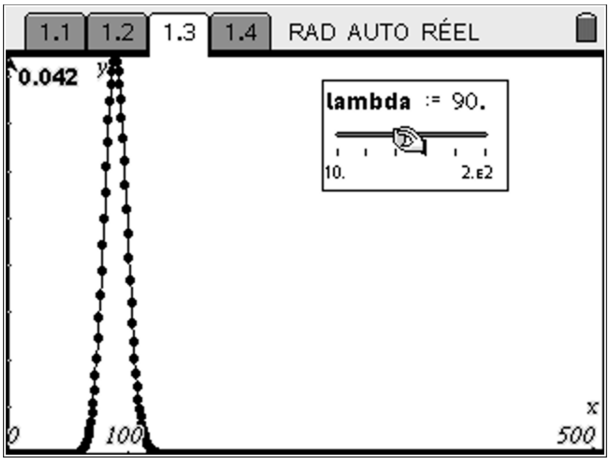
Nuage n°2 : $\left(k, p\left(k - \frac{1}{2} \leq Y \leq k + \frac{1}{2}\right)\right)$

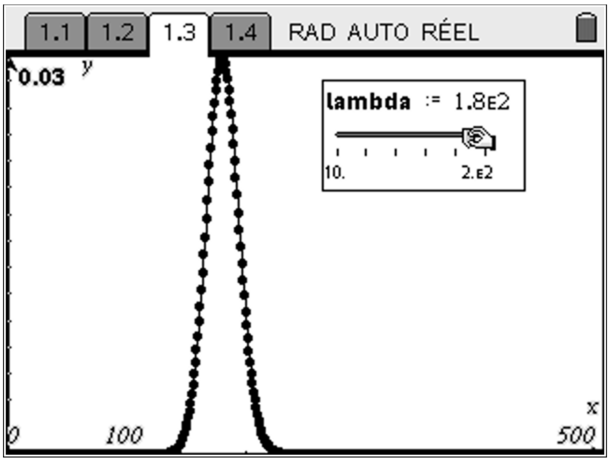
On construit une colonne supplémentaire (colonne E) qu'on va nommer E :

	A x	B y	C	D	E normale	F
◆	=seq(i,i,0,500)	=poisspdf(lambda,a[])			=normcdf(a[]−1/2,a	
1	0	6.71418E-79	lambda	180.	0.	
2	1	1.20855E-76	maximum	0.02972...	0.	
3	2	1.0877E-74			0.	
4	3	6.52619E-73			0.	
5	4	2.93678E-71			0.	
6	5	1.05724E-69			0.	
7	6	3.17173E-68			0.	
8	7	8.15587E-67			0.	
9	8	1.83507E-65			0.	
10	9	3.67014E-64			0.	

E **normale**:=normcdf$\left(a[\,]-\frac{1}{2},a[\,]+\frac{1}{2},\textbf{lambda},\sqrt{\textbf{lambda}}\right)$

On a relié les points du second nuage (clique droit Attributs) pour mieux visualiser la convergence.





On voit clairement que la loi de Poisson vers la loi normale lorsque λ devient grand.