EP073-2008 : Étude du reste d'une division euclidienne

Auteur du corrigé : Alain Soléan **TI-Nspire™ / TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP073_2008_DivisionEuclidienne.tns

1. Le sujet

Sujet 073 de l'épreuve pratique 2008 – Étude du reste d'une division euclidienne

Enoncé

Pour tout entier naturel non nul n on considère les deux nombres entiers $N = 3n^2 - n + 1$ et $D = 2n - 1$.

Le but de l'exercice consiste à déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de N par D.

Expérimentation

1. Déterminer à l'aide d'un logiciel, les valeurs du reste de la division euclidienne de N par D, pour toutes les valeurs de n comprises entre 1 et 50.
2. Représenter graphiquement ce reste en fonction de n.
3. Conjecturer, suivant les valeurs de n, l'expression du reste de la division euclidienne de N par D.

Justifications

4. La conjecture formulée est-elle vraie ?

Production demandée

- Obtention à l'écran de la représentation demandée dans la question **2.** ;
- La conjecture faite dans la question **3.** ;
- La stratégie prévue pour valider ou invalider la conjecture faite.

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Elaborer un processus itératif ;
  - Représenter graphiquement des données.
- **Compétences mathématiques (spécialité)**
  - Déterminer une expression du premier degré en n à partir d'informations graphiques et numériques ;
  - Mettre en place une démonstration par disjonction des cas.

2. Corrigé

1) Ouvrir une page **Tableurs & listes**.

Nommer **n** la colonne **A**, puis dans la cellule grisée inscrire la formule **= seq(k,k,1,50)** , pour générer la suite des 50 premiers entiers non nuls.

Dans la cellule **B1** inscrire la formule **= 3*A1^2 – A1 + 1.**

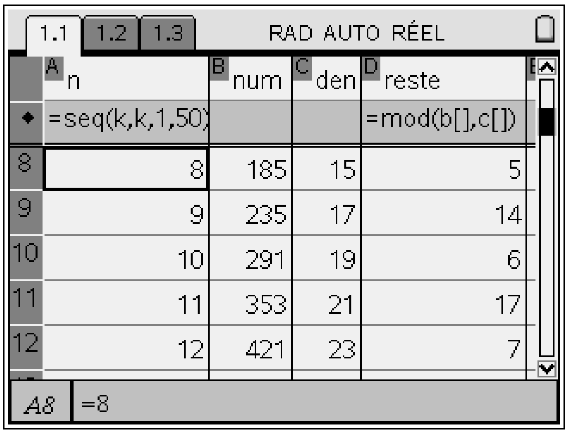
Copier cette cellule et la **Coller** sur la plage **B2 : B50** La colonne **B** contient donc les valeurs de N.

Dans la cellule **B1** inscrire la formule **= 2*A1 – 1.**

Copier cette cellule et la **Coller** sur la plage **C2 : C50** La colonne **C** contient donc les valeurs de D.

Nommer **reste** la **colonne D et** dans la cellule grisée inscrire la formule **= mod(B[],C[])**

La colonne **D** contient donc les restes de la division euclidienne de *N* par *D*

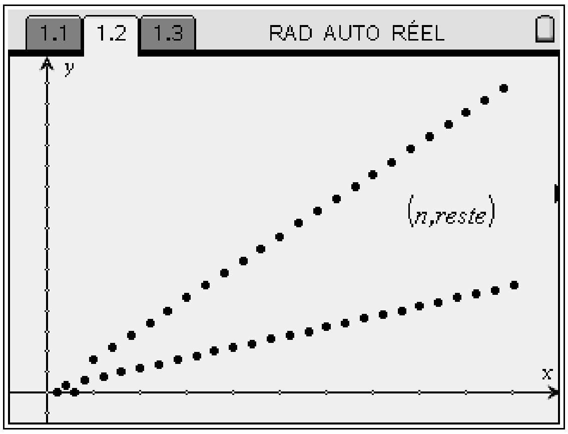


2) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**.

Définir dans **Edition de graphique**, **Nuage de points** et lier *x* à **n**, *y* à **reste**.

Choisir dans le menu **Fenêtre**, **Zoom – Données**.

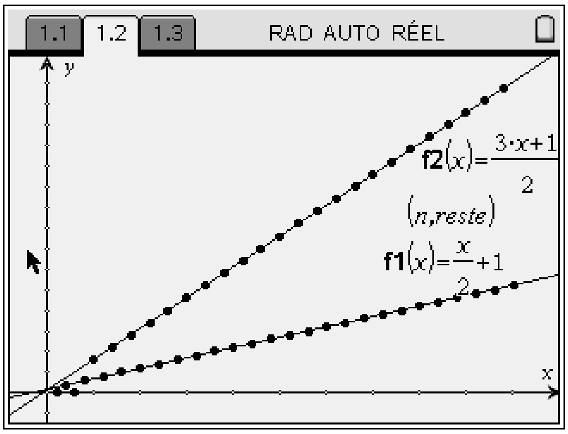
On obtient l'écran ci-contre



3) Le graphique précédent suggère que l'expression des restes est différente pour *n* pair et n impair.

On peut conjecturer que si *n* est pair ce reste semble être égal à $\frac{n}{2}+1$ (sauf pour n = 1) et si n est impair ce reste semble égal à $\frac{3n+1}{2}$

On peut vérifier cette conjecture en faisant tracer sur le graphique précédent les fonctions $f_1(x) = \frac{x}{2}+1$ et $f_2(x) = \frac{3x+1}{2}$ (sauf pour *n* = 1 et *n* = 3)

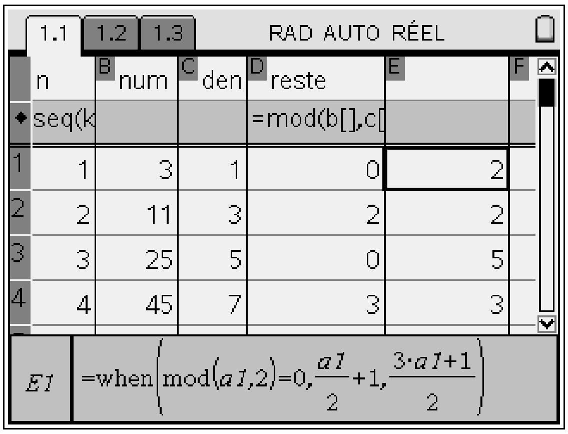


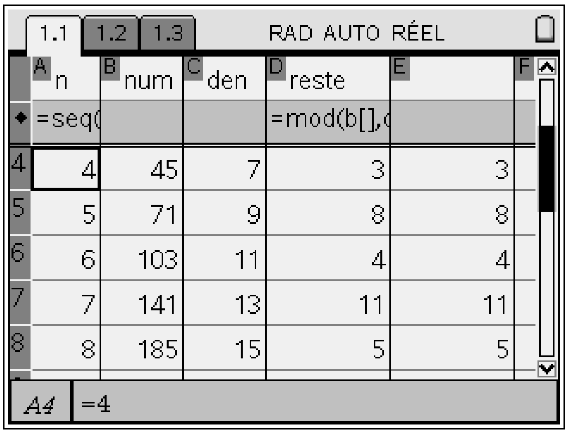
On peut aussi vérifier cette conjecture avec le tableur en ajoutant dans la cellule **E1** la formule :

= when(mod(A1,2)=0,A1/2 + 1, (3A1+1)/2)

Copier cette cellule et la **Coller** sur la plage **E2:E50**

On s'aperçoit que les colonnes **D** et **E** sont identiques sauf pour n = 1 et pour n = 3.





4) Soit n pair, posons $n = 2p$, on a $N = 12p^2 - 2p + 1$ et $D = 4p - 1$ d'où $N = 3p*D + (p + 1)$ donc le reste serait $R = p + 1 = \frac{n}{2} + 1$

Soit n impair, posons $n = 2p + 1$, on a $N = 12p^2 + 10p + 3$ et $D = 4p + 1$ d'où $N = (3p + 1)*D + (3p + 2)$

Si $n = 1$ alors $p = 0$ et $D = 1$ donc le reste $R = 0$ et non $3p + 2$ qui vaut 2

Si $n = 3$ alors $p = 1$ et $D = 5$ donc le reste $R = 0$ et non $3p + 2$ qui vaut 5

Si $n > 3$ alors $R = 3p + 2$ d où $R = \frac{3(n-1)}{2} + 2 = \frac{3n+1}{2}$

Les conjectures sont donc validées.

Tous les écrans de ce document sont obtenus à l'aide de la calculatrice.