

AL3 – IMAGES DANS DES BOÎTES DE CÉRÉALES

TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : probabilité, matrice, vecteur, suite, graphe.

1. Objectifs

Traiter un même problème sous trois points de vue : calcul matriciel, suites récurrentes, utilisation des graphes.

2. Correction et commentaires

Remarque : Cette fiche est une adaptation de l'exemple 4 des commentaires du programme officiel.

Un sous entendu de l'énoncé : dire que les images sont également réparties dans les boîtes, sous entend que les 3 images ont la même probabilité qui est donc égale à $\frac{1}{3}$.

A. Version Matrice

- 1) • Dans l'état E_1 , tout le monde possède une image. Ceci est représenté par le vecteur $v_1 = (1 \ 000 \ 0 \ 0)$.
 • Lors de l'achat de la deuxième boîte on peut, soit obtenir une image du même type (événement A : $p(A) = \frac{1}{3}$), soit obtenir une image d'un type différent (événement B : $p(B) = \frac{2}{3}$).

Donc E_2 est représenté par le vecteur $v_2 = (333 \ 667 \ 0)$.

- E_3 est représenté par le vecteur $v_3 = (111 \ 222 + 445 \ 222) = (111 \ 667 \ 222)$ car lors de l'achat de la troisième boîte :

- les 333 personnes ayant un seul type d'image ont une chance sur trois d'obtenir la même image (soit 111 personnes) et deux chances sur trois d'obtenir une image différente (soit 222 personnes) ;
- les 667 personnes ayant déjà deux types d'images ont deux chances sur trois d'obtenir une image qu'elles possédaient (soit 445 personnes) et une chance sur trois d'obtenir l'image qui leur manquait (soit 222 personnes).

- Lors de l'achat de la quatrième boîte, le même raisonnement conduit à représenter E_4 par le vecteur $v_4 = (37 \ 74 + 445 \ 222 + 222) = (37 \ 519 \ 444)$.

2) On trouve $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dans la calculatrice, P est représenté par la

```
[B]*[A]
[[333 667 0]]
```

écran 1

matrice $[A]$ et v_1 par $[B]$ (écran 1). On répète l'opération (écran 2).

Remarque : l'affichage des nombres est réglé sur Fix 0 (arrondi à l'entier le plus proche ; réglage dans MODE).

- 3) $v_n = v_1 \times P^{n-1}$.

```
[B]*[A]
[[333 667 0]]
Ref*[A]
[[111 667 222]]
[[37 519 444]]
```

écran 2

- 4) $v_{12} = (0 \ 15 \ 985)$ (écran 3). Selon le calcul théorique, 15 personnes devraient posséder la collection incomplète. Étant donné que leur nombre est exactement celui compté, on conclut que c'est très chanceux et la publicité n'est pas mensongère.

```
[[1 173 826]]
[[0 116 883]]
[[0 78 922]]
[[0 52 948]]
[[0 35 965]]
[[0 23 977]]
[[0 15 985]]
```

écran 3

B. Version Suite

Vu l'étude précédente on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n \quad \text{et} \quad a_1 = 1\,000 ; \text{représentée par la suite } u(n).$$

$$b_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + \frac{2}{3} b_n \quad \text{et} \quad b_1 = 0 ; \text{représentée par la suite } v(n).$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{3} b_n + c_n \quad \text{et} \quad c_1 = 0 ; \text{représentée par la suite } w(n).$$

NORMAL	SCI	In3
Flott	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	
RADIAN	0.874	
Fct	PAR	POL
Relie	NonRelie	
Séquentiel	Simul	
Reel	a+bi	re^iθ
Plein	HORIZ	G-T
SET CLOCK	22/03/05	14:36

écran 4

Graph1	Graph2	Graph3
nMin=1		
u(n)=u(n-1)/3		
u(nMin)=1000		
v(n)=2u(n-1)/3+		
2v(n-1)/3		
v(nMin)=0		
w(n)=v(n-1)/3+w		
(n-1)		
w(nMin)=0		

écran 5

Graph1	Graph2	Graph3
u(nMin)=1000		
v(n)=2u(n-1)/3+		
2v(n-1)/3		
v(nMin)=0		
w(n)=v(n-1)/3+w		
(n-1)		
w(nMin)=0		

écran 6

n	u(n)	v(n)
1	1000	0
2	333	667
3	111	667
4	37	519
5	12	370
6	4	255
7	1	173

écran 7

n	v(n)	w(n)
1	0	0
2	667	0
3	667	222
4	519	444
5	370	617
6	255	741
7	173	826

écran 8

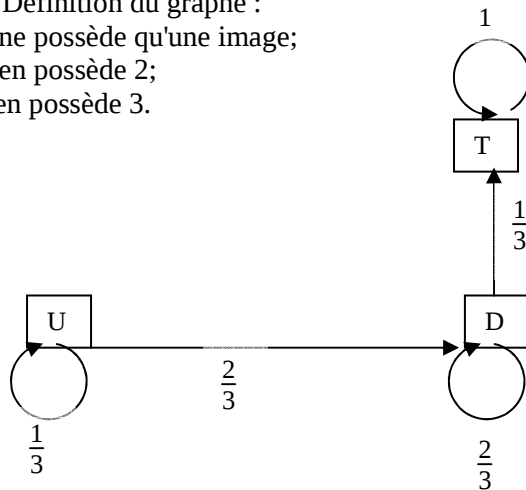
C. Version graphe

1) Définition du graphe :

U ne possède qu'une image;

D en possède 2;

T en possède 3.



Départ	Arrivée		
	U	D	T
	U	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	D	0	$\frac{2}{3}$

2) D'où la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice initiale est
 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3) La matrice M est représentée par la matrice [A] de la calculatrice.

La matrice [B] représente la situation initiale.

La matrice $C = B \times M$ représente l'état E_1 .

La matrice $D = C \times M = (B \times M) \times M = B * M^2$ représente l'état E_2 .

4) Au bout de 7 semaines (écran 9) tout le monde devrait posséder au moins deux sortes d'images. Cela ne permet pas de conclure sur l'affirmation de l'inspecteur. Il faut calculer $B \times M^{12}$.

[B]*[A]
[[333 667 0]]
Rep*[A]
[[111 667 222]]
[B]*[A]^7
[[0 116 883]]

écran 9