Nom :

Classe :

AL3 – IMAGES DANS DES BOÎTES DE CÉRÉALES

On se propose de traiter le problème suivant sous trois points de vue différents :

Trois sortes d'images sont réparties en proportions égales dans des boîtes de céréales. Un inspecteur des fraudes, ayant observé ce qui se passait pour 1 000 personnes achetant chaque semaine une boîte de céréales et voyant qu'au bout de 12 semaines, 15 personnes n'avaient que 2 des 3 images, a déclaré mensongère la publicité.
L'inspecteur des fraudes a-t-il raison ?

A. Version Matrice

On se place dans les conditions de vente de la société.

Au bout d'une semaine, les consommateurs auront acheté une boîte et seront donc tous en possession d'une image.

L'état E_n du système est un vecteur v_n à 3 lignes : la première coordonnée représente le nombre de personnes ayant un seul type d'image, la seconde le nombre de personnes ayant deux types d'images distinctes et la troisième le nombre de personnes ayant trois types d'images distinctes.

L'état E_1 est donc représenté par le vecteur : $v_1 = (1\ 000\ 0\ 0)$.

- 1) Déterminer les vecteurs v_2 , v_3 et v_4 .
- 2) Déterminer la matrice P telle que $v_2 = v_1 \times P$. Vérifier que $v_3 = v_2 \times P$ et que $v_4 = v_3 \times P$.
- 3) Déterminer v_n en fonction de v_1 et de P .
- 4) Observer l'évolution du système sur 12 semaines.

B. Version Suites

On désigne par

- a_n le nombre de personnes ayant 1 seul type d'images après n achats ;
- b_n le nombre de personnes ayant 2 types d'images distinctes après n achats ;
- c_n le nombre de personnes ayant les 3 types d'images distinctes après n achats.

Déterminer les relations entre les nombres a_{n+1} ; b_{n+1} ; c_{n+1} et les nombres a_n ; b_n ; c_n .

Observer l'évolution du système sur 12 semaines.

C. Version Graphe

- 1) Représenter cette situation par un graphe.
- 2) En déduire la matrice de passage M .
- 3) La matrice représentant la situation initiale est $B = (1\ 000\ 0\ 0)$.
Que représente la matrice $C = B \times M$?
Que représente la matrice $D = C \times M$? Exprimer D en fonction de B et de M .
- 4) Avec la calculatrice, déterminer au bout de combien de semaines tout le monde posséderait au moins deux types d'images.
Conclure sur l'affirmation de l'inspecteur des fraudes.