

F5n – RECHERCHE D'UNE SOMME MINIMALE

Auteur : Alain Ladureau

TI-Nspire™ CAS

Mots-clés : géométrie, conjecture, preuve géométrique, calcul formel, fonction, dérivée, minimum.

Fichiers associés : F5nElev_SommeMini_CAS.tns, F5nProf_SommeMini_CAS.tns

1. Objectifs

Observer, via l'éditeur de géométrie, le comportement d'une somme de distances. Emettre des conjectures. Mettre en place une démonstration géométrique. Exprimer la somme des distances en fonction d'une seule distance variable et étudier, via l'éditeur de calcul formel, les variations de cette fonction. Exécuter une construction géométrique de la solution. Changer de registre mathématique pour faire les démonstrations.

2. Commentaires

Le thème abordé, qui utilise le déplacement d'un point à l'intérieur d'un rectangle, permet, à partir d'une figure simple, d'aborder un problème assez difficile. On peut rapidement, avec les possibilités du logiciel de géométrie dynamique, entrevoir l'existence d'un point solution et conjecturer sa position approximative.

Les démonstrations faites dans deux registres bien distincts, la géométrie pure avec l'inégalité triangulaire et l'analyse avec l'étude du sens de variations d'une fonction irrationnelle, font la richesse de cette activité. La puissance du calcul formel permet de se concentrer sur l'essentiel.

A noter : ce thème figure, avec une autre démarche, dans les sujets proposés à l'épreuve pratique expérimentale de janvier 2007.

3. Conduite de l'activité

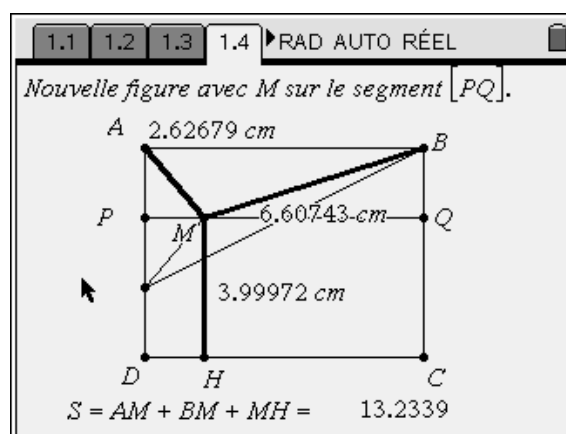
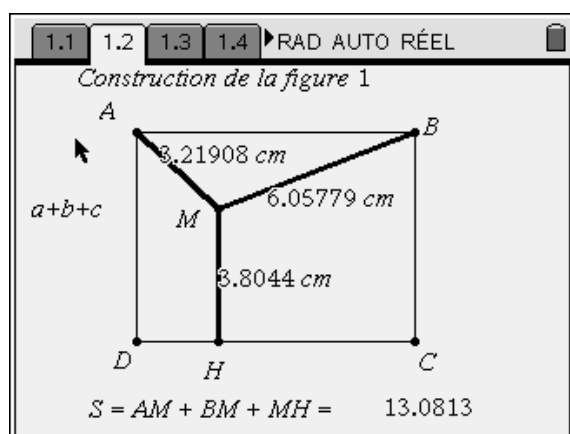
L'élève place le point M à l'intérieur du rectangle, construit le point H et les segments AM , BM et MH . Il fait afficher, à l'aide de l'outil mesure de longueurs, les longueurs des segments AM , BM et MH .

Après avoir créé avec l'outil **Texte**, le texte $a+b+c$, il sélectionne l'outil **Calculer** du même menu et, pointe sur chacune des trois mesures effectuées. La somme s'affiche alors. Il suffit de la sélectionner et de demander un nombre de décimales de 6 ou 7 chiffres (**Réglages du classeur**), pour une meilleure approche de la solution.

Le déplacement de M à l'intérieur du rectangle permet de conjecturer l'existence d'un point qui rend la somme minimale.

Dans la page 3 du fichier, l'élève est guidé vers une méthode de résolution : on se propose de limiter le déplacement de M à un segment $[PQ]$ parallèle à $[AB]$ et, dans un premier temps d'observer les variations de S .

L'élève complète la figure comme dans l'écran ci-contre, déplace M sur le segment $[PQ]$ et conjecture la position de M qui rend S minimale dans ce cas. Il conjecture que M est le milieu de $[PQ]$.



Il est alors invité à démontrer la propriété qui vient d'être observée.

Cette propriété étant vraie pour un point P quelconque de $[AD]$, on peut affirmer que le point M intérieur au rectangle qui rend minimale S , s'il existe, se trouve sur la médiatrice de $[AB]$.

Il reste à rédiger la démonstration qui utilise la propriété : $A'M + BM \leq A'B$ dans le triangle $A'MB$.

Retour à l'analyse

On sait maintenant qu'il faut chercher la solution en restant sur la médiatrice de $[AB]$.

On crée alors la fonction f de variable $x = IM$, où I désigne le milieu de $[AB]$.

Define $f(x) = 2 \cdot \sqrt{16 + x^2} + 6 - x$ Terminé

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{2 \cdot x}{\sqrt{x^2 + 16}} - 1$$

$$\text{comDenom}\left(\frac{2 \cdot x}{\sqrt{x^2 + 16}} - 1\right) = \frac{2 \cdot x - \sqrt{x^2 + 16}}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

3/99

$$\text{getNum}\left(\frac{2 \cdot x - \sqrt{x^2 + 16}}{\sqrt{x^2 + 16}}\right) = \frac{2 \cdot x - \sqrt{x^2 + 16}}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

$$\text{expand}\left(\left(2 \cdot x - \sqrt{x^2 + 16}\right) \cdot \left(2 \cdot x + \sqrt{x^2 + 16}\right)\right) = 3 \cdot x^2 - 16$$

3/5

$$\text{factor}(3 \cdot x^2 - 16, x) = (\sqrt{3} \cdot x - 4) \cdot (\sqrt{3} \cdot x + 4)$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2.3094$$

$$f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = 4 \cdot \sqrt{3} + 6 \approx 12.9282$$

4/9

Calcul de l'angle $\widehat{AMB}$

Dans le triangle rectangle AIM , la tangente de l'angle $\widehat{AMI}$ vaut $\frac{AI}{IM} = \sqrt{3}$. Donc $\widehat{AMI} = \frac{\pi}{3}$.

Le point M qui rend la somme S minimale est tel que les trois angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{AMH}$ et $\widehat{BMH}$ sont égaux à $\frac{2\pi}{3}$.

Construire le point M solution du problème revient donc à construire un angle $B \hat{A} M$ valant $\frac{\pi}{6}$ radians, le point M étant situé sur la médiatrice de $[AB]$.

Il suffit de construire la bissectrice d'un angle de sommet A valant $\frac{\pi}{3}$ radians, bissectrice qui coupe la médiatrice de $[AB]$ au point cherché.