

Nombre: _____ Fecha: _____

Actividad NUMB3RS: Medias armónicas

En "Apuesta arriesgada" el FBI pide la ayuda de Charlie cuando un individuo es muerto en el hipódromo. El hombre había ganado la Apuesta de 6 (acertar al ganador en seis carreras consecutivas) y era acreedor a una suma grande. El FBI le muestra a Charlie la libreta del individuo, que contiene muchos datos sobre carreras de caballos y ecuaciones. Charlie determina que las ecuaciones eran para escoger el caballo que llegaría en segundo lugar, no el que llegaría primero. También observa que algunas de estas ecuaciones tienen que ver con la media armónica.

La palabra "media" se emplea en matemáticas para describir el promedio de un conjunto de números. El nombre formal para promedio es "media aritmética". Hay otras medias, entre ellas la armónica y la geométrica. Cada una tiene varios usos y cada una es una medida del centro de un conjunto de números. En cierto sentido, cada una de estas medias representa un valor que es "típico" del conjunto de números.

A continuación se muestran las fórmulas para calcular estas medias para números positivos. Estas fórmulas pueden hacerse extensivas a cuatro números o más.

	Dos números: a y b	Tres números: a , b y c
Media aritmética	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{a+b+c}{3}$
Media armónica	$\frac{2}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$	$\frac{3}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$
Media geométrica	$\sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$

Ejemplo: Calcula las medias aritmética, armónica y geométrica de los números 8, 12 y 66.

Media aritmética	$\frac{8+12+66}{3} \approx 28.7$
Media armónica	$\frac{3}{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{66}\right)} \approx 13.4$
Media geométrica	$\sqrt[3]{8 \cdot 12 \cdot 66} \approx 18.5$

1. En el ejemplo anterior, ¿cuál de las medias es la mayor? ¿La menor?
2. Escoge tres números y calcula sus medias aritmética, armónica geométrica. ¿Cuál es la mayor? ¿Le menor?
3. Halla dos números cuya media aritmética sea igual a su media armónica. ¿Cómo comparan sus medias geométricas? Halla tres números que tengan esta misma propiedad.
4. a. Supongamos que el estudiante A vive a 4 millas de la escuela y el estudiante B vive a 6 millas. Toman autobuses diferentes a la escuela y cada viaje en autobús tarda 30 minutos. Halla la velocidad de cada autobús en millas por hora. Luego, halla las medias aritmética, armónica y geométrica de las velocidades de los autobuses.

- b. Estos dos autobuses recorren un total de 10 millas en media hora. Por tanto, viajan en promedio a una velocidad de 10 millas por hora. ¿Es esta la media aritmética, armónica o geométrica de las velocidades de los dos autobuses?
- c. Otros dos estudiantes viven en lugares diferentes, cada uno a 10 millas de la escuela. El viaje en autobús del estudiante C dura 30 minutos y el del estudiante D dura 20 minutos. Halla la velocidad de cada autobús en millas por hora. Luego, halla la media aritmética, armónica y geométricas de las velocidades de los autobuses.
- d. Los autobuses recorren un total de 20 millas en 50 minutos. Por tanto, viajan en promedio a una velocidad de 24 millas por hora. ¿Es esta la media aritmética, armónica o geométrica de las velocidades de los dos autobuses?
- e. A menudo se pueden emplear las medias aritmética y armónica para calcular velocidades promedio. En la pregunta 4b los autobuses viajaron el mismo tiempo. En la pregunta 4d, recorrieron la misma distancia. Considera la situación en la que dos autobuses viajan durante lapsos de tiempo diferentes y recorren distancias diferentes. El autobús del estudiante E recorre 4 millas en 20 minutos y el del estudiante F recorre 8 millas en 30 minutos. Así, los dos recorrieron un total de 12 millas en 50 minutos. Compara esta velocidad con la media aritmética, armónica y geométrica de las velocidades de cada uno de los autobuses.

Hace algunos años el programa radial "Car Talk", transmitido por NPR, presentó un problema en el cual una pareja hipotética tenía dos vehículos: un SUV que consumía mucha gasolina y un híbrido supereficiente. El SUV andaba 10 millas por galón (mpg) y el híbrido andaba 100 mpg. Los vehículos recorrieron el mismo número de millas cada año. La pareja deseaba mejorar el número promedio de millas por galón para la familia. Tenían dos opciones: afinar el SUV para que lograra 11 mpg o reemplazar el híbrido con un "superhíbrido" que lograra 200 mpg.

5. Aplica la media armónica para calcular el promedio inicial de millas por galón para la familia y para cada una de sus opciones. ¿Qué consejo le darías a la pareja?

Xenofonte, el erudito griego (c. 427 – 355 a.C.), usó la media armónica para fijar el precio justo en una transacción. El siguiente es un ejemplo contemporáneo: Supón que deseas comprar un auto usado que, a tu modo de ver, vale \$8,000. El vendedor considera que vale \$12,000. Un observador neutral sugiere que "partan la diferencia" y acuerden un precio de \$10,000 (la media aritmética de los dos valores). Tú protestas porque esto es un 25% más del valor que tú le das al auto, mientras que únicamente es un 16.7% menos de la cifra del vendedor, y que por lo tanto, la aplicación de la media aritmética no es justa para ti. El vendedor dice: "Bueno, si me indicas un método más justo, hacemos negocio".

6. Aplica lo que has aprendido en esta actividad para hallar un precio más justo y explica cómo convencerías al vendedor de que este precio nuevo es justo. Calcula la media armónica de tu precio y el precio del vendedor. ¿Por qué sería más justo usar la media armónica que la media aritmética al "partir la diferencia"?

Un profesor de matemáticas desea calificar a sus estudiantes por un período de dos semanas. Supongamos que durante estas dos semanas cierto estudiante obtuvo 16 puntos sobre 20 en una tarea, 21 puntos sobre 30 en otra tarea y 91 puntos sobre 100 en una prueba. Cada puntaje vale lo mismo para la nota final. El profesor considera la posibilidad de calcular las calificaciones empleando la media aritmética armónica o geométrica.

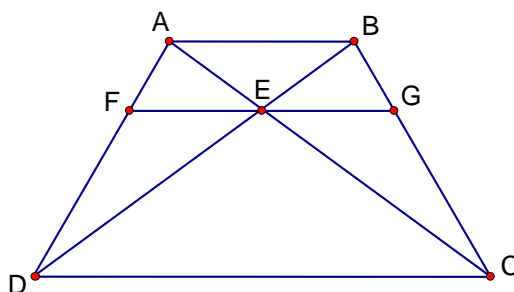
7. ¿Qué calificación obtendría el estudiante bajo cada sistema? ¿Sería justo cada uno de estos métodos? ¿Qué método preferiría el estudiante? ¿Por qué?

El objeto de esta actividad es dar a los estudiantes un vistazo breve y sencillo de un tema matemático muy extenso. TI y NCTM lo invitan a usted y a sus estudiantes a aprender más sobre este tema con las extensiones que se ofrecen abajo y con su propia investigación independiente.

Extensiones

Para el estudiante

- Basándote en tu trabajo de las preguntas 1 y 2 haz una conjetura sobre el orden, de menor a mayor, de las medias aritmética, armónica y geométrica de dos números positivos.
 - Comienza una demostración de tu conjetura mostrando primero que la media mayor es mayor que la media de la mitad.
 - Completa tu demostración probando que la media de la mitad es mayor que la menor.
- El NCTM "Student Math Notes" (noviembre de 2004) presentó el siguiente problema:
Sea $ABCD$ un trapecio isósceles con $AB = 4$ y $DC = 12$. Halla la longitud de \overline{FG} , el segmento recto que pasa a través de la intersección de las diagonales, E , que es paralela a las bases. ¿Qué relación hay entre este valor y la media aritmética, armónica o geométrica de 4 y 12?



- En 1820 James Dean propuso la media armónica como método de redondeo para la distribución de la Cámara de Representantes de los Estados Unidos. El método actual aplica la media geométrica. Para obtener más información, visita <http://www.siam.org/pdf/news/552.pdf>.

Recursos adicionales

Este artículo contiene actividades que tratan acerca de cómo decidir si se debe aplicar la media armónica o aritmética para resolver un determinado problema.

S. L. Brown y M. A. Rizzardi, "Averaging Rates: Deciding When to Use the Harmonic or Arithmetic Mean" *Mathematics Teacher*, Vol. 98, No. 9, May, 2005.