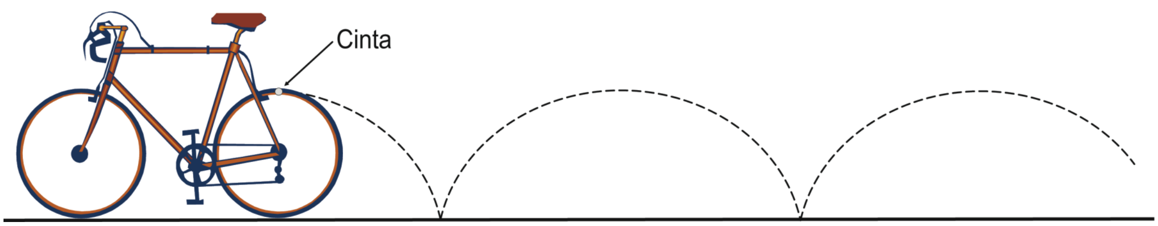
Nombre: ______________________________ Fecha: ________________

Actividad *NUMB3RS*: La curva cicloide II

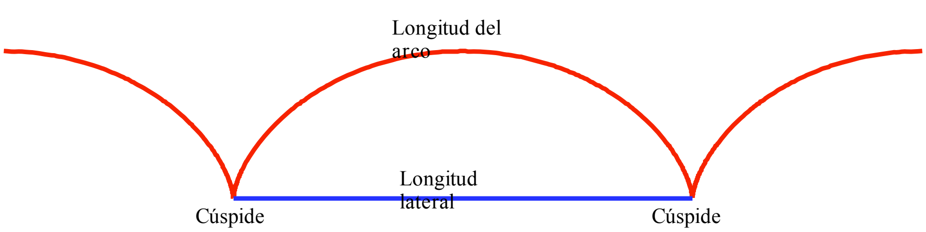
En “El Topo” Charlie ayuda a la FBI a analizar un accidente en que estaban envueltos una mujer y un conductor que se dio a la fuga. Para entender mejor la situación, Charlie examina la mecánica de caminar. Dice que “cuando caminas, es como una serie de círculos rotando dentro de otro círculo mayor. El talón que sigue una órbita hacia atrás y después hacia adelante pasando por la rodilla es un círculo pequeño dentro de un círculo más grande: el de caminar”. Entonces el objetivo viene a ser determinar la trayectoria del talón, no sólo dentro del ciclo, sino cuando la persona camina hacia adelante.

Imagina que Charlie pega un trozo de cinta reflectora a la rueda de la bicicleta de Larry. Mientras Larry va en su bicicleta, Charlie va marcando los puntos de la trayectoria de la cinta. La trayectoria que sigue la cinta se llama cicloide y es una combinación de traslación (la bicicleta yendo hacia delante) y de rotación (la rueda girando).



Para completar su análisis y calcular la velocidad de la cinta reflectora en la rueda, Charlie debe determinar la longitud del arco. Por tratarse de una superficie curva, la longitud del arco será aproximada.

Cada punto donde la cicloide toca tierra se llama una cúspide; las secciones entre las cúspides son las bóvedas. Charlie se concentra en analizar una sola bóveda porque la longitud del arco de la cicloide entera es un múltiplo de la longitud de una bóveda. La longitud lateral, la longitud del arco y el área bajo la curva pueden expresarse en términos relacionados con el círculo original y escritos en términos del radio.

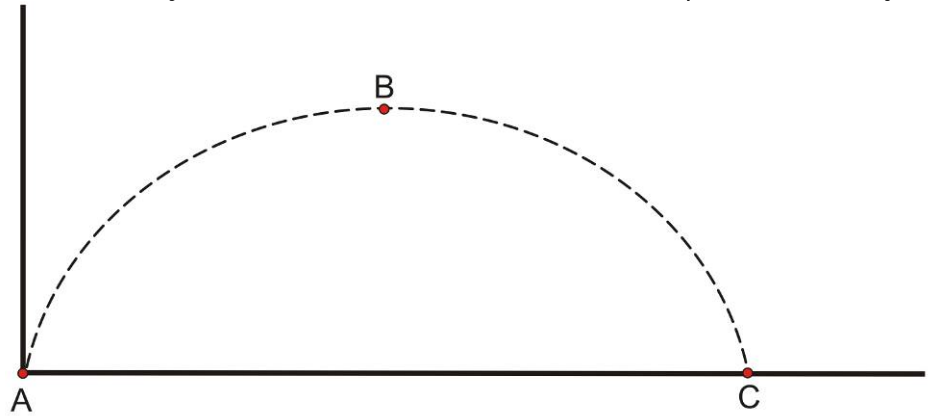


1. ¿Es la circunferencia de la rueda de Larry la longitud del arco de una sola bóveda o la distancia lateral entre las cúspides?

Puedes aproximar la longitud del arco fragmentando la curva en una serie de líneas rectas, produciendo segmentos de recta que se pueden medir y encontrar sumando el total. Este proceso introduce varios conceptos de cálculo, como el límite, la suma de una secuencia y el teorema fundamental del cálculo.

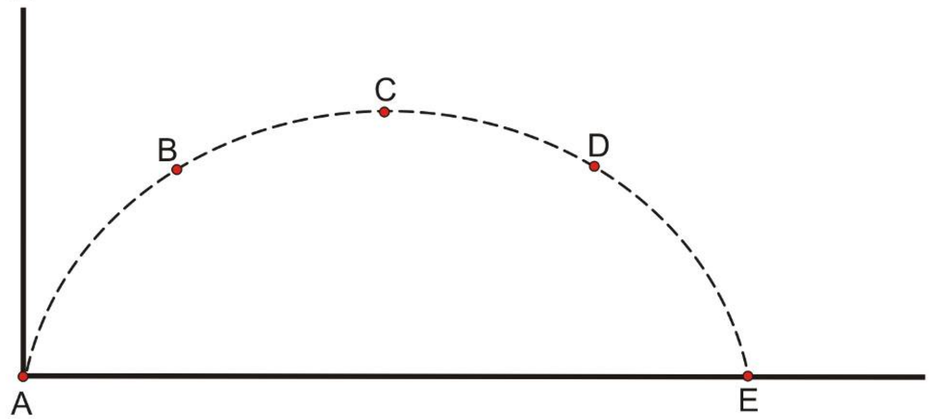
Brock Wenciker, Escuela Secundaria Shawnee Mission East, Overland Park, KS

Traza los segmentos de recta de los arcos, mídelos y suma sus longitudes.



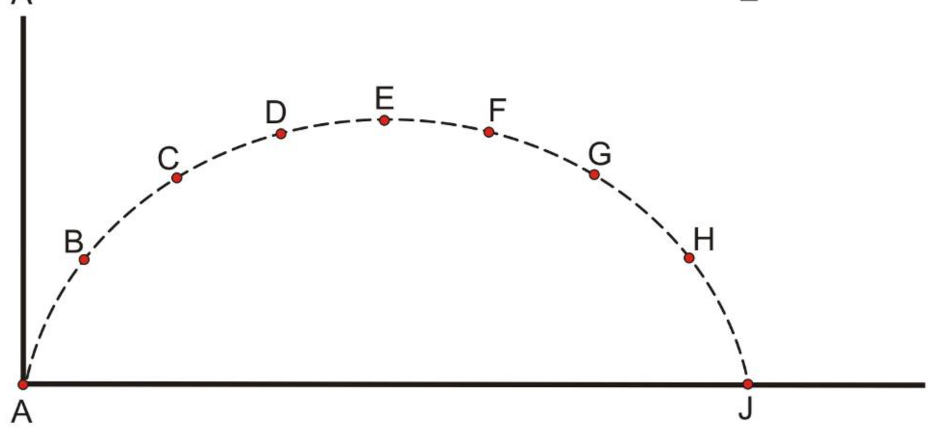
AB =
BC =

Suma =



AB =
BC =
CD =
DE =

Suma =



AB =
BC =
CD =
DE =
EF =
FG =
GH =
HJ=

Sum =

2. ¿Cuál de las respuestas arriba es la mejor aproximación de la longitud del arco?

3. ¿Por qué el número de segmentos representaría una diferencia en la aproximación de la longitud del arco?

4. Al acercarse el número de segmentos al infinito, ¿qué podrías decir sobre la diferencia entre la suma de la longitud de los segmentos y la longitud real del arco?

El concepto de usar intervalos más pequeños cada vez para aproximar la longitud de una curva es una idea importante en el cálculo. Este concepto se puede explorar más en la sección de Extensiones de esta actividad.

Brock Wenciker, Escuela Secundaria Shawnee Mission East, Overland Park, KS

El objeto de esta actividad es dar a los estudiantes un vistazo breve y sencillo de un tema matemático muy extenso. TI y NCTM lo invitan a usted y a sus estudiantes a aprender más sobre este tema con las extensiones que se ofrecen abajo y con su propia investigación independiente.

Extensiones

Introduction

Charlie dice que las cicloides son “curvas rectificables” porque su longitud es finita. Siendo así, y sabiendo que las curvas son diferenciables (o sea “lisas”), podemos usar la siguiente fórmula para calcular la longitud del arco del punto *a* al punto *b*

$$\text{LongArco} = \int_a^b ds\,,$$

donde *ds* es la longitud de uno de los pequeños segmentos de recta usados para aproximar la longitud de la curva. Cada segmento es “infinitesimalmente” pequeño, de modo que su longitud es muy cercana a la sección de la curva con los mismos puntos finales. El símbolo $\int$ representa la suma de esas pequeñas longitudes. Esta suma se conoce como una integral y es uno de los conceptos clave del cálculo.

En nuestro ejemplo, la cicloide generada a partir de un círculo con un radio de 1 puede expresarse con las ecuaciones paramétricas a la derecha, donde (x, y) representa el lugar de la rueda en el tiempo t.

$$x = t - \operatorname{sen} t$$
$$y = 1 - \cos t$$

Ahora establece la integral definitiva:

$\text{LongArco} = \int_a^b ds$. Por la fórmula de distancia sabemos que $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Aquí, dx y dy denotan los cambios infinitesimales en x y en y, respectivamente. La longitud del arco puede expresarse como se muestra a la derecha.

$$\text{LongArco} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2}\, dt$$

1. Simplifica la expresión algebraica dentro de la raíz cuadrada y si sabes calcular integrales, determina la longitud exacta de una sola bóveda en una cicloide.

2. Con la longitud del arco para un círculo con radio 1 calculado generaliza la longitud del arco de una bóveda. Escribe tus respuestas en términos del radio del círculo.

Recursos adicionales

- El applet de este sitio Web calcula la longitud de una aproximación de líneas discontinuas a una determinada curva: **http://xanadu.math.utah.edu/java/ApproxLength.html**
- Para ver animaciones de cálculo hechas con Mathcad, visita **http://www.math.odu.edu/cbii/calcanim**.
- Este sitio Web trae una explicación de la paradoja de Zenón sobre la tortuga y Aquiles: **http://www.mathacademy.com/pr/prime/articles/zeno_tort**.
- En 1685, Sir Christopher Wren usó un método de agotamiento para calcular la longitud de una cicloide. Lee más sobre de Sir Christopher Wren y la historia de la cicloide en **http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Cycloid.html**.

Brock Wenciker, Escuela Secundaria Shawnee Mission East, Overland Park, KS