

## EP 052 – 2007 : Suite de Syracuse

Auteurs du corrigé : France et Michel Villiaumey

TI-Nspire™ / TI-Nspire™ CAS

**Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site <http://education.ti.com/france>, menu Ressources pédagogiques.

**Fichier associé** : EP052\_2007\_Syracuse.tns

### 1. Le sujet

#### Sujet 052 de l'épreuve pratique 2007 – Suite de Syracuse

##### Énoncé

A tout  $n$  entier naturel ( $n > 1$ ), on applique l'algorithme suivant :

Si  $n = 1$  le processus s'arrête, sinon :

- si  $n$  est pair, on le transforme en  $\frac{n}{2}$ ,
- si  $n$  est impair, on le transforme en  $3n + 1$ .

On note à nouveau  $n$  le résultat obtenu et on réapplique l'algorithme à ce  $n$ .

Lorsque, pour l'entier  $n$ , l'algorithme aboutit à 1, on appelle « suite de Syracuse associée à  $n$  » la suite (finie) des entiers rencontrés pour passer de  $n$  à 1.

On note  $l(n)$  le nombre d'entiers de cette suite finie.  $l(n)$  est la longueur de la suite de Syracuse associée à  $n$ .

Exemple : pour  $n = 5$  on obtient successivement les nombres  $5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1$  et donc  $l(5) = 6$ .

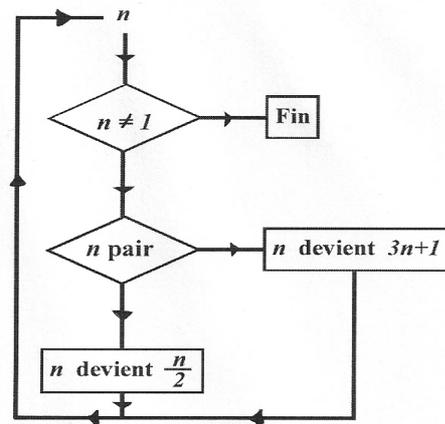
1. a) À l'aide d'un tableur, appliquer cet algorithme aux entiers compris entre 1 et 100.
  - b) Compléter alors la feuille de calcul en donnant les suites de Syracuse des 100 premiers entiers.
  - c) Préciser les valeurs de  $l(26)$  et  $l(27)$ .
2. Etude de quelques résultats particuliers relatifs aux longueurs des suites  $l(n)$  pour  $n$  entier naturel
- a) Quelle est la longueur des suites de Syracuse associées aux nombres de la forme  $2^p$  pour  $p$  entier naturel non nul ?
  - b) Que remarque-t-on quant aux suites de Syracuse associées aux nombres de la forme  $8k + 4$  et  $8k + 5$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .
  - c) Démontrer la conjecture émise en 2. b).

3. Démontrer que si le reste de la division euclidienne de  $n$  par 4 est 0, 1 ou 2 alors l'algorithme amène nécessairement, au bout d'un certain nombre d'étapes, à un entier strictement inférieur à  $n$ .

La conjecture de Syracuse affirme que pour tout entier non nul  $n$  le processus aboutit à 1. La longueur de la suite quant à elle, n'est pas à l'heure actuelle prévisible, en toute généralité.

##### Production demandée

- Construction du tableau des suites de Syracuse pour les 10 premiers entiers.
- Le tableau pour les 100 entiers sera simplement visé par l'examineur.
- Énoncé des conjectures du 2.
- Preuve de 2. b) et de 3.



## Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Remplir un tableur à l'aide d'un algorithme.
  - Savoir modifier une page de calcul.
  - Utiliser le tableur pour émettre des conjectures.
- **Compétences mathématiques**
  - Faire un raisonnement par récurrence ;
  - Faire une démonstration par disjonction des cas.

## 2. Corrigé

Le corrigé proposé est réalisé avec TI-nspire, sur l'ordinateur, pour des raisons d'affichage et de temps de calcul.

Les écrans ci-dessous sont obtenus à partir de l'ordinateur.

1) a) Ouvrir une page **Tableur & listes**.

Ecrire en A1 le nombre 1, puis en B1, = A1 + 1 ;

**Copier** cette dernière formule, et la **Coller** sur toute la ligne 1 jusqu'à la cellule T1. On obtient alors la liste des nombres entiers de 1 à 20.

Ecrire en A2 la formule figurant dans le bandeau ci-dessous, la **Copier**, puis la **Coller** sur la plage B2 : T120.

|    | A | B | C | D  | E | F  | G  | H  | I | J  | K  | L  | M  | N  | O  | P   | Q  | R  | S  | T  | U  |
|----|---|---|---|----|---|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|
| 1  | 1 | 2 | 3 | 4  | 5 | 6  | 7  | 8  | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16  | 17 | 18 | 19 | 20 |    |
| 2  |   |   | 1 | 10 | 2 | 16 | 3  | 22 | 4 | 28 | 5  | 34 | 6  | 40 | 7  | 46  | 8  | 52 | 9  | 58 | 10 |
| 3  |   |   |   | 5  | 1 | 8  | 10 | 11 | 2 | 14 | 16 | 17 | 3  | 20 | 22 | 23  | 4  | 26 | 28 | 29 | 5  |
| 4  |   |   |   | 16 |   | 4  | 5  | 34 | 1 | 7  | 8  | 52 | 10 | 10 | 11 | 70  | 2  | 13 | 14 | 88 | 16 |
| 5  |   |   |   | 8  |   | 2  | 16 | 17 |   | 22 | 4  | 26 | 5  | 5  | 34 | 35  | 1  | 40 | 7  | 44 | 8  |
| 6  |   |   |   | 4  |   | 1  | 8  | 52 |   | 11 | 2  | 13 | 16 | 16 | 17 | 106 |    | 20 | 22 | 22 | 4  |
| 7  |   |   |   | 2  |   |    | 4  | 26 |   | 34 | 1  | 40 | 8  | 8  | 52 | 53  |    | 10 | 11 | 11 | 2  |
| 8  |   |   |   | 1  |   |    | 2  | 13 |   | 17 |    | 20 | 4  | 4  | 26 | 160 |    | 5  | 34 | 34 | 1  |
| 9  |   |   |   |    |   |    | 1  | 40 |   | 52 |    | 10 | 2  | 2  | 13 | 80  |    | 16 | 17 | 17 |    |
| 10 |   |   |   |    |   |    |    | 20 |   | 26 |    | 5  | 1  | 1  | 40 | 40  |    | 8  | 52 | 52 |    |
| 11 |   |   |   |    |   |    |    | 10 |   | 13 |    | 16 |    |    | 20 | 20  |    | 4  | 26 | 26 |    |
| 12 |   |   |   |    |   |    |    | 5  |   | 40 |    | 8  |    |    | 10 | 10  |    | 2  | 13 | 13 |    |
| 13 |   |   |   |    |   |    |    | 16 |   | 20 |    | 4  |    |    | 5  | 5   |    | 1  | 40 | 40 |    |
| 14 |   |   |   |    |   |    |    | 8  |   | 10 |    | 2  |    |    | 16 | 16  |    |    | 20 | 20 |    |
| 15 |   |   |   |    |   |    |    | 4  |   | 5  |    | 1  |    |    | 8  | 8   |    |    | 10 | 10 |    |
| 16 |   |   |   |    |   |    |    | 2  |   | 16 |    |    |    |    | 4  | 4   |    |    | 5  | 5  |    |
| 17 |   |   |   |    |   |    |    | 1  |   | 8  |    |    |    |    | 2  | 2   |    |    | 16 | 16 |    |
| 18 |   |   |   |    |   |    |    |    |   | 4  |    |    |    |    | 1  | 1   |    |    | 8  | 8  |    |
| 19 |   |   |   |    |   |    |    |    |   | 2  |    |    |    |    |    |     |    |    | 4  | 4  |    |
| 20 |   |   |   |    |   |    |    |    |   | 1  |    |    |    |    |    |     |    |    | 2  | 2  |    |

A2 | =when(a1=1 or a1="□", "□", when(mod(a1,2)=0, a1/2, 3\*a1+1))

A2 | =when(a1=1 or a1="□", "□", when(mod(a1,2)=0, a1/2, 3\*a1+1))

Remarque :

Les rectangles en pointillés s'obtiennent en frappant sur " suivi d'un espace ( le rectangle et deuxième " s'inscrivent automatiquement ).

b) Pour obtenir le tableau demandé, procéder de la manière suivante :

remplacer 1 par 21 dans la cellule A1, valider. On obtient immédiatement le tableau pour les entiers de 21 à 40.

Remplacer ensuite 21 par 41, 41 par 61, 61 par 81.

|    | A  | B  | C   | D  | E  | F  | G   | H  | I  | J   | K   | L  | M   | N   | O   | P  | Q   | R   | S   | T  | U |
|----|----|----|-----|----|----|----|-----|----|----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|---|
| 1  | 21 | 22 | 23  | 24 | 25 | 26 | 27  | 28 | 29 | 30  | 31  | 32 | 33  | 34  | 35  | 36 | 37  | 38  | 39  | 40 |   |
| 2  | 64 | 11 | 70  | 12 | 76 | 13 | 82  | 14 | 88 | 15  | 94  | 16 | 100 | 17  | 106 | 18 | 112 | 19  | 118 | 20 |   |
| 3  | 32 | 34 | 35  | 6  | 38 | 40 | 41  | 7  | 44 | 46  | 47  | 8  | 50  | 52  | 53  | 9  | 56  | 58  | 59  | 10 |   |
| 4  | 16 | 17 | 106 | 3  | 19 | 20 | 124 | 22 | 23 | 142 | 4   | 25 | 26  | 160 | 28  | 28 | 29  | 178 | 5   |    |   |
| 5  | 8  | 52 | 53  | 10 | 58 | 10 | 62  | 11 | 11 | 70  | 71  | 2  | 76  | 13  | 80  | 14 | 14  | 88  | 89  | 16 |   |
| 6  | 4  | 26 | 160 | 5  | 29 | 5  | 31  | 34 | 34 | 35  | 214 | 1  | 38  | 40  | 40  | 7  | 7   | 44  | 268 | 8  |   |
| 7  | 2  | 13 | 80  | 16 | 88 | 16 | 94  | 17 | 17 | 106 | 107 |    | 19  | 20  | 20  | 22 | 22  | 22  | 134 | 4  |   |
| 8  | 1  | 40 | 40  | 8  | 44 | 8  | 47  | 52 | 52 | 53  | 322 |    | 58  | 10  | 10  | 11 | 11  | 11  | 67  | 2  |   |
| 9  |    | 20 | 20  | 4  | 22 | 4  | 142 | 26 | 26 | 160 | 161 |    | 29  | 5   | 5   | 34 | 34  | 34  | 202 | 1  |   |
| 10 |    | 10 | 10  | 2  | 11 | 2  | 71  | 13 | 13 | 80  | 484 |    | 88  | 16  | 16  | 17 | 17  | 17  | 101 |    |   |
| 11 |    | 5  | 5   | 1  | 34 | 1  | 214 | 40 | 40 | 40  | 242 |    | 44  | 8   | 8   | 52 | 52  | 52  | 304 |    |   |
| 12 |    | 16 | 16  |    | 17 |    | 107 | 20 | 20 | 20  | 121 |    | 22  | 4   | 4   | 26 | 26  | 26  | 152 |    |   |
| 13 |    | 8  | 8   |    | 52 |    | 322 | 10 | 10 | 10  | 364 |    | 11  | 2   | 2   | 13 | 13  | 13  | 76  |    |   |
| 14 |    | 4  | 4   |    | 26 |    | 161 | 5  | 5  | 5   | 182 |    | 34  | 1   | 1   | 40 | 40  | 40  | 38  |    |   |
| 15 |    | 2  | 2   |    | 13 |    | 484 | 16 | 16 | 16  | 91  |    | 17  |     |     | 20 | 20  | 20  | 19  |    |   |
| 16 |    | 1  | 1   |    | 40 |    | 242 | 8  | 8  | 8   | 274 |    | 52  |     |     | 10 | 10  | 10  | 58  |    |   |
| 17 |    |    |     |    | 20 |    | 121 | 4  | 4  | 4   | 137 |    | 26  |     |     | 5  | 5   | 5   | 29  |    |   |
| 18 |    |    |     |    | 10 |    | 364 | 2  | 2  | 2   | 412 |    | 13  |     |     | 16 | 16  | 16  | 88  |    |   |
| 19 |    |    |     |    | 5  |    | 182 | 1  | 1  | 1   | 206 |    | 40  |     |     | 8  | 8   | 8   | 44  |    |   |
| 20 |    |    |     |    | 16 |    | 91  |    |    |     | 103 |    | 20  |     |     | 4  | 4   | 4   | 27  |    |   |

c) On lit dans la première colonne du tableur,  $l(26) = 11$  :

|    | A  | B   |
|----|----|-----|
| 1  | 26 | 27  |
| 2  | 13 | 82  |
| 3  | 40 | 41  |
| 4  | 20 | 124 |
| 5  | 10 | 62  |
| 6  | 5  | 31  |
| 7  | 16 | 94  |
| 8  | 8  | 47  |
| 9  | 4  | 142 |
| 10 | 2  | 71  |
| 11 | 1  | 214 |
| 12 |    | 107 |
| 13 |    | 322 |
| 14 |    | 161 |
| 15 |    | 484 |
| 16 |    | 242 |
| 17 |    | 121 |
| 18 |    | 364 |
| 19 |    | 182 |

Suite de la colonne B :

|    |      |
|----|------|
| 20 | 91   |
| 21 | 274  |
| 22 | 137  |
| 23 | 412  |
| 24 | 206  |
| 25 | 103  |
| 26 | 310  |
| 27 | 155  |
| 28 | 466  |
| 29 | 233  |
| 30 | 700  |
| 31 | 350  |
| 32 | 175  |
| 33 | 526  |
| 34 | 263  |
| 35 | 790  |
| 36 | 395  |
| 37 | 1186 |
| 38 | 593  |
| 39 | 1780 |
| 40 | 890  |

On déroule jusqu'à obtenir 1 ce qui permet de lire  $l(27) = 112$  :

|     |    |
|-----|----|
| 103 | 80 |
| 104 | 40 |
| 105 | 20 |
| 106 | 10 |
| 107 | 5  |
| 108 | 16 |
| 109 | 8  |
| 110 | 4  |
| 111 | 2  |
| 112 | 1  |



c) *Démonstration de la conjecture*

Construire le début des suites de Syracuse dans les deux cas :

Terme initial :  $8k + 4$

$8k + 4$  est pair donc le terme suivant est  $4k + 2$

$4k + 2$  est pair donc le terme suivant est  $2k + 1$

$2k + 1$  est impair donc le terme suivant est  $6k + 4$

Donc la conjecture est vérifiée.

Terme initial :  $8k + 5$

$8k + 5$  est impair donc le terme suivant est  $24k + 16$

$24k + 16$  est pair donc le terme suivant est  $12k + 8$

$12k + 8$  est pair donc le terme suivant est  $6k + 4$

## 3) Démontrer le résultat demandé par disjonction des cas :

*1<sup>er</sup> cas* :  **$n$  est de la forme  $4k$** ,  $n$  est donc pair, son successeur dans la suite est  $2k$  qui est strictement inférieur à  $4k$  donc strictement inférieur à  $n$ .

*2<sup>ème</sup> cas* :  **$n$  est de la forme  $4k + 1$** ,  $n$  est donc impair, son successeur dans la suite est donc  $12k + 4$ .

Ce nombre est pair et a pour successeurs  $6k + 2$ ,  $3k + 1$ .

$3k + 1$  est strictement inférieur à  $4k + 1$  donc strictement inférieur à  $n$ .

*3<sup>ème</sup> cas* :  **$n$  est de la forme  $4k + 2$** ,  $n$  est donc pair et a pour successeur  $2k + 1$  qui est strictement inférieur à  $4k + 2$  donc strictement inférieur à  $n$ .

Ce qui achève la démonstration.

## 3. Pour aller plus loin

*Utilisation du tableur pour obtenir directement la longueur de la suite de Syracuse d'un entier naturel.*

Ouvrir une nouvelle page **Tableur & listes**.

Ecrire en A1 le nombre  $n$  choisi, recopier en A2 la formule utilisée dans le problème. **Copier** cette formule et la **Coller** vers le bas jusqu'à A200.

Ecrire en B1 la formule :

`B1 | =when(a1="[]",0,1)`

La **Copier** et la **Coller** vers le bas jusqu'à B200 (les deux colonnes doivent avoir exactement le même nombre d'éléments).

Cette formule inscrit 0 si dans la cellule A adjacente ne figure aucun nombre et 1 dans le cas contraire.

Nommer la colonne B (**m** par exemple) en « tête » de colonne.

Pour obtenir la longueur de la suite de Syracuse, il suffit de demander dans une cellule quelconque la somme des éléments de la colonne B par l'instruction : **sum(m)** (écrite dans l'exemple dans la cellule E1).

On retrouve bien dans le premier écran, le résultat de la question **1.c**) :  $l(27) = 112$  (cf. écran, page suivante).

Pour un autre calcul, remplacer la valeur en A1.

|    | A   | B | m | C       | D   | E | F |
|----|-----|---|---|---------|-----|---|---|
| 1  | 27  | 1 |   | L(a1) = | 112 |   |   |
| 2  | 82  | 1 |   |         |     |   |   |
| 3  | 41  | 1 |   |         |     |   |   |
| 4  | 124 | 1 |   |         |     |   |   |
| 5  | 62  | 1 |   |         |     |   |   |
| 6  | 31  | 1 |   |         |     |   |   |
| 7  | 94  | 1 |   |         |     |   |   |
| 8  | 47  | 1 |   |         |     |   |   |
| 9  | 142 | 1 |   |         |     |   |   |
| 10 | 71  | 1 |   |         |     |   |   |
| 11 | 214 | 1 |   |         |     |   |   |
| 12 | 107 | 1 |   |         |     |   |   |
| 13 | 322 | 1 |   |         |     |   |   |

$B1 | = \text{when}(a1 = \text{" "}, 0, 1)$

|    | A  | B | m | C       | D  | E | F | G | H | I | J |
|----|----|---|---|---------|----|---|---|---|---|---|---|
| 1  | 13 | 1 |   | L(a1) = | 10 |   |   |   |   |   |   |
| 2  | 40 | 1 |   |         |    |   |   |   |   |   |   |
| 3  | 20 | 1 |   |         |    |   |   |   |   |   |   |
| 4  | 10 | 1 |   |         |    |   |   |   |   |   |   |
| 5  | 5  | 1 |   |         |    |   |   |   |   |   |   |
| 6  | 16 | 1 |   |         |    |   |   |   |   |   |   |
| 7  | 8  | 1 |   |         |    |   |   |   |   |   |   |
| 8  | 4  | 1 |   |         |    |   |   |   |   |   |   |
| 9  | 2  | 1 |   |         |    |   |   |   |   |   |   |
| 10 | 1  | 1 |   |         |    |   |   |   |   |   |   |
| 11 |    | 0 |   |         |    |   |   |   |   |   |   |
| 12 |    | 0 |   |         |    |   |   |   |   |   |   |

$A2 | = \text{when}(a1=1 \text{ or } a1 = \text{" "}, \text{" "}, \text{when}(\text{mod}(a1, 2) = 0, \frac{a1}{2}, 3 \cdot a1 + 1))$