EP 122 - 2009 : Divisibilité d'entiers naturels

Auteur du corrigé : Alain SOLEAN

TI-Nspire™/TI-Nspire™ CAS

Avertissement : ce document a été réalisé avec la version 1.7**Fichier associé** : EP122_2009_Divisibilite.tns**1. Le sujet****Sujet 122 de l'épreuve pratique 2009 – Divisibilité par 2, 3, 7 et 13 de certains entiers naturels****Énoncé**Pour tout entier naturel n non nul, on considère le nombre U_n défini par :

$$U_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}.$$

On cherche à déterminer si ce nombre peut être divisible par l'un ou plusieurs des nombres premiers suivants : 2 ; 3 ; 7 et 13.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, calculer $U_1 ; U_2 ; \dots ; U_{30}$.
2. Déterminer les listes des restes de la division de U_n par 2 ; par 3 ; par 7 et par 13.
 - a) Quelles conjectures peut-on en tirer ?
 - b) À quelle(s) condition(s) sur n , le nombre U_n semble-t-il être divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

Partie B

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, U_n est divisible par 7 si, et seulement si, 7 divise $3^n - 1$.
4. À l'aide de la question précédente, démontrer la conjecture émise pour 7.
5. Dans le cas où U_n est divisible par 7, U_n est-il divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

Production demandée

- Les différentes conjectures.
- La démonstration de la question 4.

Compétences évaluées

- Savoir utiliser un tableur.
- Émettre des conjectures.
- Savoir utiliser le théorème de Gauss.

2. Corrigé**Partie A***Remarque préliminaire :*Le nombre U_n est égal à la somme des n premiers termes de la suite géométrique de terme initial 1 et de raison 3, donc $U_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

1) Ouvrir une page **Tableurs & listes**.

Dans les cellules grisées des colonnes **A**, **B**, **C**, **D**, **E** et **F** écrire les formules :

A : = seq($t, t, 1, 30$) liste des valeurs de n de 1 à 30

B : = $(3^{a[n]} - 1)/2$ liste des valeurs de U_n

C : = mod($b[,2]$) restes de la division de U_n par 2

D : = mod($b[,3]$) restes de la division de U_n par 3

E : = mod($b[,7]$) restes de la division de U_n par 7

F : = mod($b[,13]$) restes de la division de U_n par 13

A	B	C	D	E	F
1	1	1	1	1	1
2	2	4	0	1	4
3	3	13	1	1	6
4	4	40	0	1	5
5	5	121	1	1	2

2) On obtient ainsi les restes de U_n

par 2 : {1 ; 0} ;

par 3 : {1} ;

par 7 : {1 ; 4 ; 6 ; 5 ; 2 ; 0} ;

par 13 : {1 ; 4 ; 0}.

a) On peut donc formuler les conjectures suivantes :

- U_n est divisible par 2 si et seulement si n est pair ;
- U_n est divisible par 7 si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{6}$;
- U_n est divisible par 13 si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{3}$.

A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	0	1	4	4
3	3	13	1	1	6	0
4	4	40	0	1	5	1
5	5	121	1	1	2	4

b) Il semble que U_n

- est divisible par 7×13 lorsque $n \equiv 0 \pmod{6}$;
- est divisible par $2 \times 7 \times 13$ lorsque $n \equiv 0 \pmod{6}$.

A	B	C	D	E	F	G
6	6	364	0	1	0	0
7	7	1093	1	1	1	1
8	8	3280	0	1	4	4
9	9	9841	1	1	6	0
10	10	295...	0	1	5	1

Partie B

3) Si U_n est divisible par 7 alors $\frac{3^n - 1}{2} = 7k$ avec $k \in \mathbb{N}$ donc $3^n - 1 = 7(2k)$ donc $3^n - 1$ est divisible par 7.

Réciproquement, si $3^n - 1$ est divisible par 7 alors 7 divise $2U_n$ alors comme 7 ne divise pas 2, d'après le Théorème de Gauss, 7 divise U_n .

4) $3^6 = 729$ donc $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ donc $3^{6k} \equiv 1 \pmod{7}$ d'où si $n = 6k$ alors 7 divise $3^n - 1$ donc 7 divise U_n .

5) Si $n \equiv 0 \pmod{6}$ alors $n \equiv 0 \pmod{3}$ et n est pair, donc si U_n est divisible par 7 alors U_n est divisible par 7×13 et aussi par $2 \times 7 \times 13$.