EP063 – 2008 : Restes modulo *p*

Auteur du corrigé : Alain Soléan

TI-Nspire™ CAS

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP063_2008_Restes.tns

1. Le sujet

Sujet 063 de l'épreuve pratique 2008 – Restes modulo *p*

Enoncé

Le but de cet exercice est d'étudier les restes modulo p (p entier strictement supérieur à 1) des suites (u_n) définies par $u_n = an + b$, a et b étant deux entiers naturels donnés.

1. Construire une feuille de calcul donnant les restes modulo 20 des 20 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = 12n + 5$.

2. Adapter la feuille de calcul de façon à obtenir les restes modulo p des 20 premiers termes de la suite définie par $u_n = an + b$, $n \in \mathbb{N}$, de telle manière que l'on puisse modifier les valeurs de a, b et n. Notez sur votre feuille les restes obtenus dans les cas particuliers suivants :

a) $p = 20$ et $u_n = 5n - 3$

b) $p = 7$ et $u_n = 5n - 3$

Quelle conjecture peut-on formuler quant aux suites formées par ces restes euclidiens ?

3. Démonstration de la conjecture :

a) Montrer que, parmi les nombres u_0 ,u_1, …,u_p ,il existe deux nombres ayant le même reste dans la division euclidienne par p, pour p entier naturel non nul.
b) Soit n_0 et $n_0 + T$ les rangs de ces deux nombres ($T \neq 0$). Montrer que aT est un multiple de p.
c) En déduire que pour tout entier naturel k, u_{T+k} et u_k ont le même reste dans la division euclidienne par p.
d) Démontrer alors la conjecture.

Production demandée

- Feuille de calcul correspondant aux diverses suites ;
- Les dé monstrations de la question **3.**

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Construire une feuille de calcul utilisant des fonctions arithmétiques.

- **Compétences mathématiques (spécialité)**
  - Utiliser la division euclidienne ;
  - Calculer avec des congruences.

2. Corrigé

1) Ouvrir une page **Tableurs & listes**.

Dans la cellule **A1** inscrire " **p** =",dans la cellule **A2** inscrire " **a** =" et dans la cellule **A3** inscrire " **b** ="

On remplira les cellules **B1**,**B2** et **B3** avec les différentes valeurs de p, a et n demandées.

© Texas Instruments 2008 / Photocopie autorisée

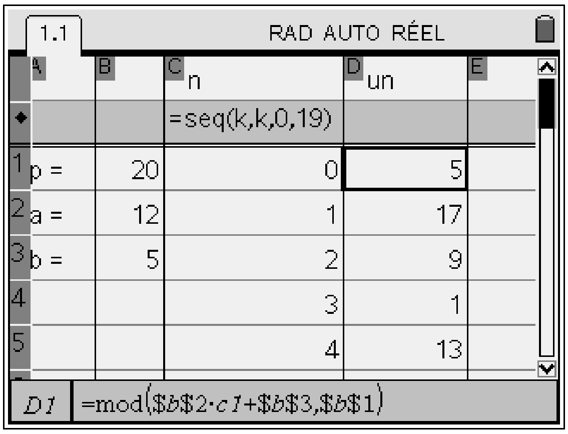
Nommer **n** la colonne **C et** dans la cellule grisée inscrire la formule **= seq(k,k,0,19)** pour obtenir la liste des 20 premiers entiers.

Dans la cellule D1 inscrire la formule :

=mod(B2*C1+B3,B1)

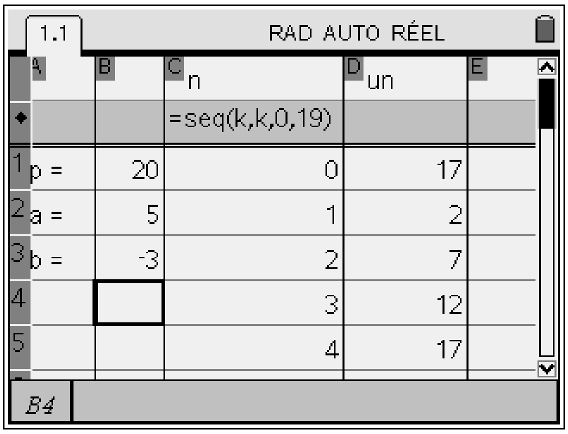
Copier cette cellule et la **coller** sur la plage **D2 :D19**

On obtient ainsi les restes demandés lorsqu'on renseigne les cellules **B1**, **B2** et **B3**.



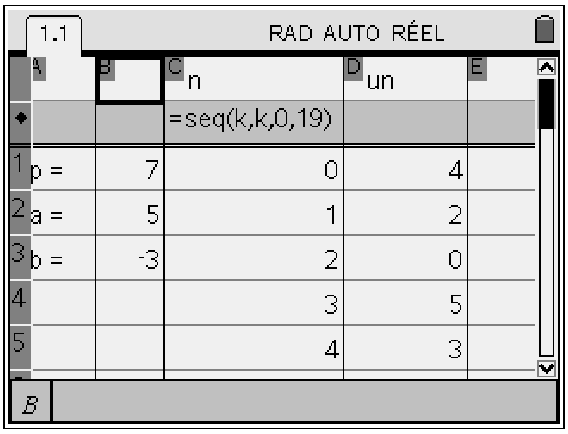
2) a) On obtient l'écran ci-dessous

pour $p = 20$ et $u_n = 5n - 3$



b) et l'écran ci - dessous

pour $p = 7$ et $u_n = 5n - 3$



On peut conjecturer dans chaque cas que la suite des restes est périodique **(** période 5 dans la question **1),** période 4 pour la question **2)a)** et période 7 pour la question **2)b)).**

3) Si $a = 0$, la suite u_n est constante donc tous les restes seront égaux, donc on considère dans la suite $a \geq 1$

a) Pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq p$ on a $0 \leq ak \leq ap$ et comme $a \geq 1$ il existe un entier t compris entre 0 et p, tel que at soit multiple de p. Donc $u_{k+t} = ak + at + b$ a le même reste modulo p que u_k .

b) Si u_{n0} et u_{n0+T} ont le même reste modulo p alors $u_{n0+T} - u_{n0}$ est multiple de p. Donc aT est multiple de p.

c) Pour tout k $u_{T+k} - u_k = aT$ donc les deux termes ont bien le même reste modulo p.

d) Donc pour $a = 5$ l'entier T minimal tel que aT est multiple de 20 est bien 4
et l'entier minimal tel que aT est multiple de 7 est bien 5.
Les conjectures sont bien vérifiées.

Tous les écrans de ce document sont obtenus à l'aide de la calculatrice.

© Texas Instruments 2008 / Photocopie autorisée