EP014 - 2008: Distance d'un point à une courbe

Auteurs du corrigé : France et Michel Villiaumey **TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

Fichier associé : EP014_2008_Distance_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 014 de l'épreuve pratique 2008 – Distance d'un point à une courbe

Enoncé

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction exponentielle et le point B à pour coordonnées (2 ; –1).

On admet que la distance BM admet un minimum quand M décrit $\mathcal{C}$. Ce minimum est appelé distance du point B à la courbe $\mathcal{C}$.

Le but de l'exercice est de trouver la distance du point B à la courbe $\mathcal{C}$.

1. Réaliser à l'aide d'un logiciel une figure dynamique correspondant à cette situation.

a) M est un point quelconque de la courbe $\mathcal{C}$. Faire une conjecture pour laquelle la distance BM semble minimale. On appelle ce point M_0.

b) Tracer la droite d perpendiculaire en M_0 à la droite (BM_0). Quelle semble être la position particulière de la droite d ?

c) Utiliser le logiciel pour contrôler les conjectures et, éventuellement les rectifier.

2. On se propose de déterminer la valeur exacte de la distance du point B à la courbe $\mathcal{C}$.

a) Déterminer, par le calcul, la position du point M_0.

b) Quelle est la valeur exacte de la distance du point B à la courbe $\mathcal{C}$?

3. Vérifier, par le calcul, la conjecture formulée au **1.b)**.

Production demandée

- Obtention à l'écran de la figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.
- La formulation des conjectures et leur contrôle.
- Les stratégies de démonstration prévues pour répondre à la question **2.** et le résultat des calculs.
- La vérification demandée à la question **3.**

Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Utiliser un logiciel de géométrie dynamique.
  - Visualiser une propriété à partir des fonctions du logiciel.
  -
- **Compétences mathématiques**
  - Connaître les fonctions usuelles.
  - Déterminer le minimum d'une fonction.

2. Corrigé

1) Ouvrir une page **Graphique et Géométrie**.

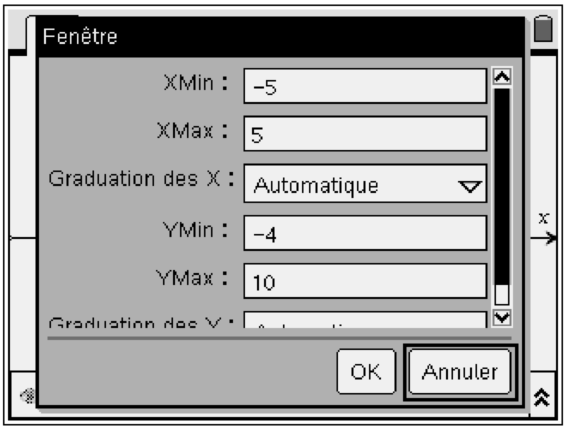
Ecrire dans la ligne de saisie l'équation de la fonction exponentielle.

Régler la fenêtre comme ci contre puis après validation :

Menu 4 : Fenêtre B : Zoom - carré

afin d'obtenir un repère orthonormé.

Cacher la ligne de saisie par ctrl G

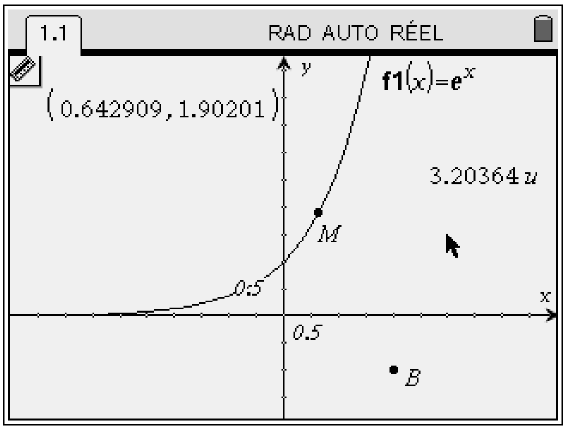


Placer un point quelconque dans l'écran et donner ses coordonnées :

Menu 1 : Actions 7 : Coord. et éq.

Se positionner sur l'abscisse du point, valider deux fois et remplacer cette abscisse par l'abscisse du point B : 2. Faire de même pour l'ordonnée.
Nommer le point B ainsi placé, cacher ses coordonnées.

Prendre un point M sur la courbe et mesurer la distance MB.

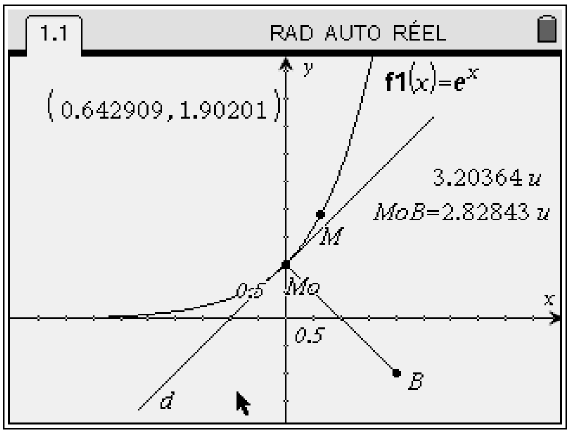


Déplacer le point M afin de déterminer la position M_0 pour laquelle MB est minimale. Placer ce point, le nommer M_0 et mesurer la distance minimale M_0B.
Tracer le segment $[BM_0]$ et la perpendiculaire à ce segment en M_0 :

Menu 9 : Constructions 1 : Perpendiculaire.

Montrer successivement le segment puis le point M_o.
La droite d semble être la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Vérifier cette conjecture en traçant la tangente en ce point :

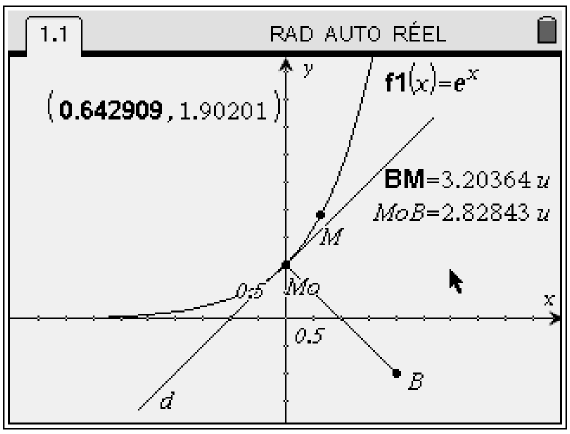
Menu 6 : Points et droites 7 : Tangente



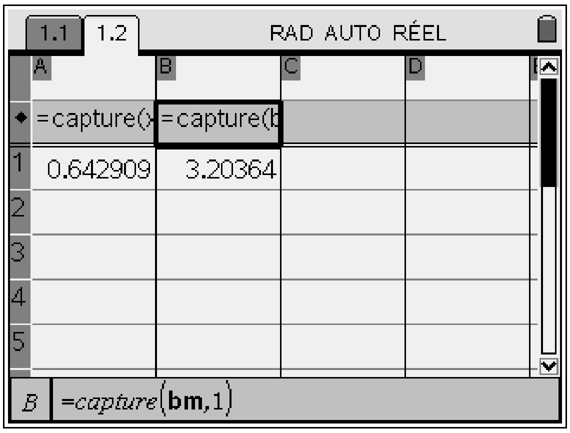
Stocker l'abscisse du point M dans la variable **xm**, pour cela se positionner sur cette abscisse, valider, taper ctrl sto→ et écrire **xm**, valider.
Faire de même avec la distance BM.

Remarque : les valeurs ainsi stockées sont maintenant en caractères gras.

Ouvrir une nouvelle page **Tableur & listes**.



Se placer dans la cellule grisée de la colonne **A**

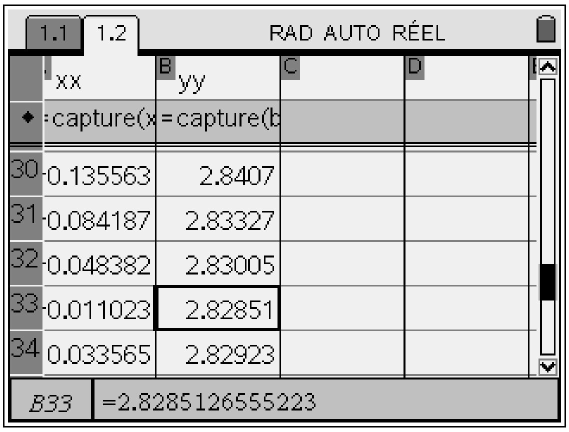


Menu 3 : Données 2 : Capture de données
1 Capture automatique de données

Taper **xm** qui remplace **var**, valider.
Faire de même dans la colonne **B** pour la variable **BM**.

Remarque : la première ligne du tableur se remplit des valeurs figurant à l'écran précédent.

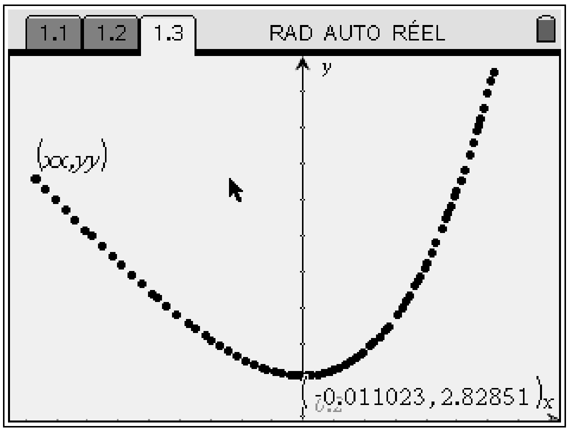
Revenir à la page précédente, et animer à la main le point *M*.



Revenir au tableur : les colonnes **A** et **B** se sont automatiquement complétées.

Rechercher la valeur minimale de BM pour vérifier la conjecture précédente.

Nommer respectivement ces deux colonnes **xx** et **yy**.



Ouvrir une nouvelle page **Graphiques et Géométrie**.

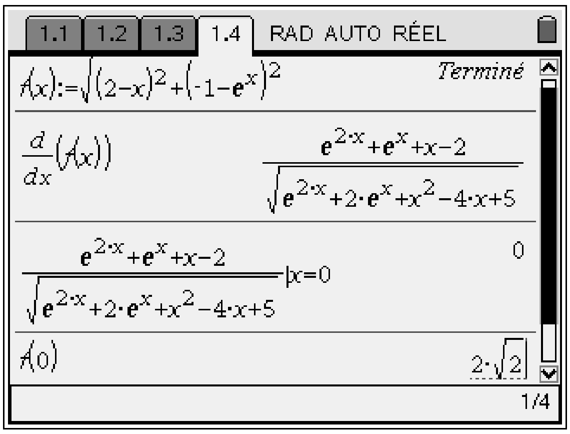
Menu 3 : Type de graphique 4 : Nuage de points.

Choisir **xx** en abscisse et **yy** en ordonnée.

Prendre un **Zoom - Données**, cacher la ligne de saisie.

Prendre un point sur le nuage, valider, les coordonnées apparaissent et se déplacer jusqu'au minimum.

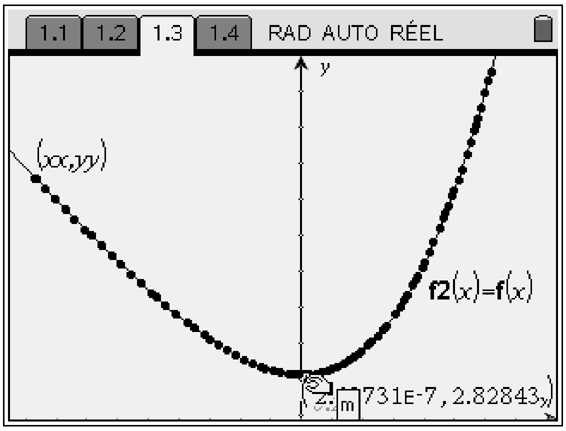
2) Ouvrir une page de **Calculs.**



Définir la fonction f telle que $f(x)$ = MB.

Calculer $f'(x)$, puis $f'(0)$.

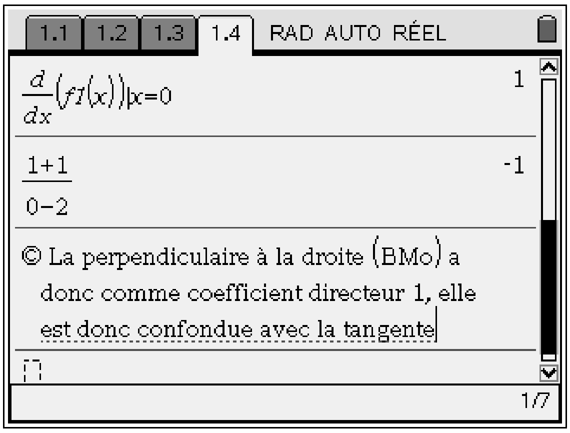
Le numérateur de $f'(x)$ est la somme de trois fonctions croissantes, il s'annule pour 0, la fonction f présente donc un minimum pour $x = 0$. Ce minimum est égal à $f(0)$ qui correspond bien à la valeur approchée trouvée.



Revenir à la page précédente, dans la ligne de saisie taper $f_1(x) = f(x)$.

Constater que la courbe ajuste parfaitement le nuage de points.

Prendre un point sur la courbe et le déplacer jusqu'à l'apparition de la lettre m dans un carré qui valide à nouveau la conjecture.



3) Revenir à la page 1.4.

Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0.

Calculer le coefficient directeur de la droite (BM_0)

Conclure :