St4 - SIMULATION ET AIGUILLE DE BUFFON

TI-82 Stats – TI-83 Plus – TI-84 Plus

Mots-clés : simulation, fonction partie entière, fonction *random*, fonctions trigonométriques, radian, listes, programmation, fluctuation d'échantillonnage, pixel.

1. Objectifs

Mettre en œuvre une simulation en utilisant deux points de vue différents.
Le premier permettra de visualiser la simulation.
Le deuxième permettra de mettre en œuvre la méthode de Monte-Carlo pour le calcul de l'aire d'un domaine donné.

2. Énoncé

Voir la fiche élève.

3. Résolution

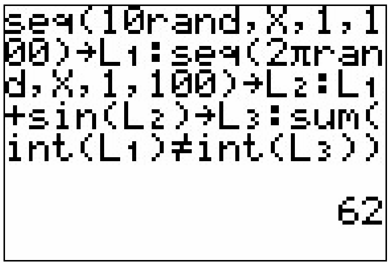
1) On propose de faire cette approche expérimentale à la maison.

2) a) La réponse repose sur la formule : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

b) On prend pour coordonnées des extrémités de l'aiguille (a ; b) et ($a + \cos\alpha$; $b + \sin\alpha$).

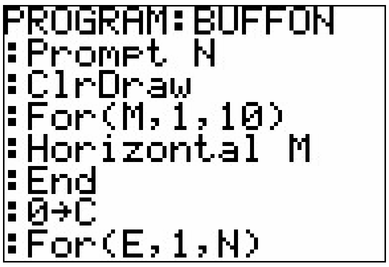
c) L'aiguille rencontre une ligne si les parties entières des ordonnées des extrémités sont différentes. Les abscisses n'interviennent pas.

d) Pour réaliser plusieurs simulations et gagner du temps, on peut placer toutes les commandes proposées sur un même écran séparées par :
Il suffira ensuite d'appuyer sur **ENTER** plusieurs fois sans avoir à ressaisir les commandes (*écran* 1).
ipart(-0.5) = 0 et **int (-0.5) = -1**.
Si on utilise la fonction **ipart**, on ne comptabilise pas les aiguilles qui rencontrent l'axe des abscisses.

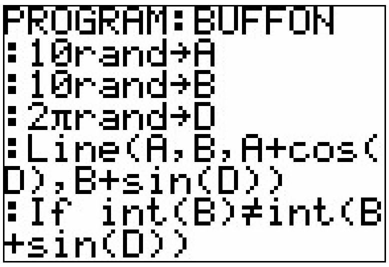


écran 1

e) Voici un programme possible (*écrans* 2 à 4) et l'*écran* 6 obtenu quand on demande 100 tiges (*écran* 5) :

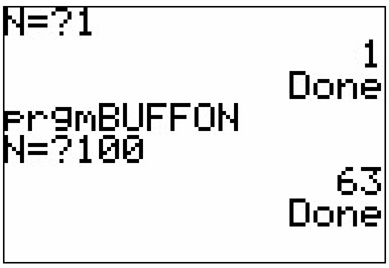


écran 2

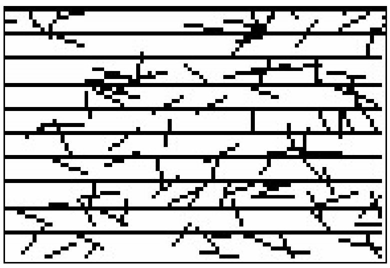


écran 3

écran 4



écran 5



écran 6

3) a) Pour que l'aiguille coupe une ligne, il faut que la composante verticale d'une demi-aiguille soit supérieure à h, distance à la droite la plus proche, ce qui se traduit par sin (α) $\geq h$.

b) Commandes : **seq(rand,X,1,100) → L1** et **seq(πrand,X,1,100)→ L2** .

c) Commande : **sum(L1 ≤ sin(L2))** .

d) Après avoir choisi la fenêtre et activé la fonction **Y1 = sin(X),** on lance le programme suivant (cf. *écrans* 7 et 8). *N* est le nombre d'essais souhaité et *C* représente le nombre de cas favorables.

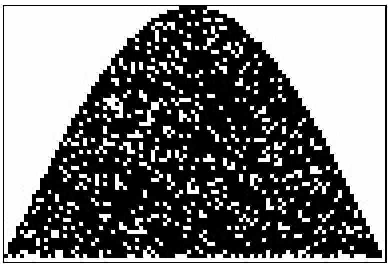
```
PROGRAM:AIGUILLE
:Prompt N
:ClrDraw
:0→C
:For(I,1,N)
:rand→D
:πrand→A
:If D≤sin(A)
```

écran 7

```
PROGRAM:AIGUILLE
:Then
:Pt-On(A,D)
:C+1→C
:End:End
:Pause
:Disp C
:
```

écran 8

Si l'on est patient, on prend *N* = 10 000 et on obtient les *écrans* 9 et 10 suivants :



écran 9

```
prgmAIGUILLE
N=?10000
            6300
            Done
```

écran 10

e) Les cas favorables sont représentés par le domaine limité par la courbe représentative de la fonction sinus et les cas possibles par le rectangle de dimensions 1 et π.
Cette simulation est la méthode de Monte-Carlo pour évaluer l'aire du domaine limité par une arche de sinusoïde. Dans ce cas, l'estimation est de $0{,}63 \times \pi \approx 1{,}98$.

f) Si l'on calcule l'aire graphique par la commande du menu **CALCULATE** (**2nd [CALC]**), on obtient 2.

g) La simulation précédente nous permet d'obtenir une estimation de π peu différente de 3,17.

Remarque : *La méthode de Monte-Carlo n'est pas une méthode assez précise pour obtenir une estimation réellement satisfaisante de π. On estime qu'il faudrait lancer près d'un million d'aiguilles pour avoir 95 chances sur 100 que les trois premières décimales de π soient exactes.*

Nom : …………………………………………………………..…. Classe : ………………………

St4 - SIMULATION ET AIGUILLE DE BUFFON

Sur une feuille de papier où sont tracées des lignes parallèles espacées d'une distance d donnée, on lance des tiges de longueur d.
Quel est le pourcentage de tiges qui rencontrent une ligne ?

1) Approche expérimentale

Prendre une boîte d'allumettes ; mesurer la longueur d de celles-ci.
Prendre une grande feuille de papier. Tracer des lignes parallèles espacées de la distance d.
Lancer les allumettes sur la feuille ainsi préparée.
Compter le nombre d'allumettes qui rencontrent une ligne et en déduire le pourcentage d'allumettes qui rencontrent une ligne par rapport au contenu de la boîte.

2) Première modélisation

Dans un repère orthonormal d'origine O, on considère le carré $OABC$, où B a pour coordonnées (10 ;10).
On trace les droites d'équation $y = k$, avec k entier variant de 0 à 10.

a) Soit M (a ; b) un point à l'intérieur du carré et N le point de coordonnées ($a + \cos\alpha$; $b + \sin\alpha$). Montrer que le segment [MN] est de longueur 1.

b) Montrer qu'à partir des trois nombres a, b et α on peut matérialiser la position d'une aiguille de longueur 1 dans le repère.

c) À quelle condition l'aiguille rencontre-t-elle une ligne ?

d) Modélisation avec les listes
On choisit 100 nombres b au hasard compris entre 0 et 10 que l'on met dans L1 :

seq(10rand,X,1,100) → L1 *

On choisit 100 nombres α au hasard compris entre 0 et 2 π que l'on met dans L2 :

seq(2 π rand,X,1,100) → L2

On construit la liste L3 correspondant à l'ordonnée de N :

L1 + sin(L2) → L3

On calcule le nombre de fois où la condition **2) c)** est réalisée :

sum(int(L1) ≠ int(L3))

Expliquer pourquoi on n'obtient pas le même résultat si on remplace **int** par **ipart** dans la ligne précédente.

e) À l'aide d'un programme, réaliser une visualisation graphique de cette modélisation.
On choisira la fenêtre $0 \leq X \leq 10$, $0 \leq Y \leq 10$, et on tracera les lignes par la commande **Horizontal** du menu **2nd [DRAW]**.

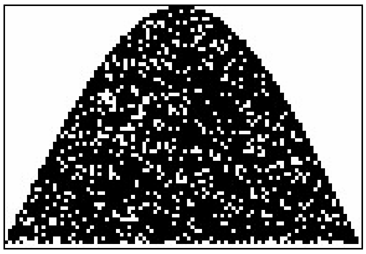
3) Modélisation à l'aide de la fonction sinus

Pour simplifier les calculs, on prendra, dans cette partie, $d = 2$.

a) On appelle I le milieu de l'aiguille, α l'angle que fait cette aiguille avec les lignes et h la distance de I à la ligne la plus proche ; $h \in [0 ; 1]$ et $\alpha \in [0 ; \pi]$.
Montrer que l'aiguille coupe une ligne à condition que $h \leq \sin(\alpha)$.

b) Choisir 100 valeurs au hasard de h et de α ; on les stockera dans les listes L1 et L2.

c) Compter le nombre de fois où $h \leq \sin(\alpha)$.
Refaire plusieurs fois cette simulation en notant les résultats.



d) Dans la fenêtre $0 \leq X \leq \pi$ et $0 \leq Y \leq 1$, tracer la représentation de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.
À l'aide d'un programme, reprendre la simulation précédente en plaçant les points de coordonnées (α ; h) qui répondent à la condition **3) c)**. On utilisera la commande **Pt-On** du menu **POINTS** (**2nd** **[DRAW]**) *.
On peut ainsi obtenir l'écran ci-contre.

e) Interpréter graphiquement les cas favorables et les cas possibles.

f) La commande $\int f(x)\,dx$ du menu **CALCULATE** (**2nd** **[CALC]**) de la calculatrice permet de calculer l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe représentant la fonction f et les droites « verticales » correspondant à deux valeurs de x demandées par la machine (**Lower limit** et **Upper limit** *).
Calculer l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses et la courbe de la fonction sinus entre les valeurs 0 et π ; on prend **Lower limit = 0** et **Upper limit = π.**

g) À partir des résultats précédents, quelle estimation de π peut-on en déduire ?

* Dans les menus en français, remplacer : **seq(** par **suite(**, **sum(** par **somme(**, **int(** par **PartEnt(**, **ipart(** par **ent(**, **Pt-On**(par **Pt-Aff(**, **Lower limit** et **Upper limit** par **Borne Inf** et **Borne Sup** .

