

EP 021–2008 : Recherche d'un lieu géométrique

Auteur du corrigé : François Texier

TI-Nspire™ CAS

Avertissement : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site <http://education.ti.com/france>, menu Ressources pédagogiques.

Fichier associé : EP021_2008_lieu_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 021 de l'épreuve pratique 2008– Recherche d'un lieu géométrique

Enoncé

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle ABB' tel que $(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$. Soit M un point variable de la droite (BB') et M' l'image de A dans la rotation de centre M et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On note I le milieu de $[BB']$ et J le milieu de $[MM']$. On cherche à déterminer le lieu du point J lorsque M décrit la droite (BB') .

1.

- Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Visualiser le lieu du point J lorsque M décrit la droite (BB') .
- Que peut-on conjecturer à propos des triangles ABI et AMJ ?

2. Soit $\mathcal{S}$ la similitude directe de centre A qui transforme B en I .

- Déterminer l'image du point M par la similitude $\mathcal{S}$.
- En déduire le lieu du point J quand M décrit la droite (BB') .

Production demandée

- Visualisation à l'écran de la figure ;
- Formulation orale des conjectures sur le lieu du point J et sur les triangles ABI et AMJ ;
- Réponses argumentées aux questions 2.a) et 2.b).

Compétences évaluées

- Compétences TICE**
 - Construction d'une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
 - Visualisation d'un lieu.
- Compétences mathématiques (spécialité)**

Reconnaître et utiliser :

 - des triangles semblables ;
 - des angles orientés ;
 - des similitudes directes.

2. Corrigé

Les écrans qui figurent dans ce corrigé sont obtenus à partir de la calculatrice.

1) Étude expérimentale

Ouvrir une page **Graphique & géométrie**.

Demander l'affichage du **Plan géométrique**.

Tracer le **Segment** $[BB']$ nommer les points « à la volée ».

Tracer la **Droite** (BB') .

Construire la **Perpendiculaire** à (BB') passant par B .

Tracer le **Cercle** de rayon BB' et de centre B .

Construire le point A **Point d'intersection** du cercle et de la perpendiculaire précédemment tracée.

Cacher la perpendiculaire passant par B et le cercle.

Tracer les **Segments** $[BA]$ et $[AB']$ pour achever le triangle.

Placer un point M **Point sur** la droite (BB') .

Faire apparaître le **Texte** $-\frac{\pi}{2}$. (π s'obtient avec la touche $\boxed{\alpha \beta ^\circ}$) Construire le point M' image de A

par la **Rotation** de centre M et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Construire le point I **Milieu** de $[BB']$ et J , **Milieu** des points M et M' .

Cacher l'angle de la rotation.

Faire apparaître le **Lieu** du point I quand M décrit le segment $[DC]$, mettre ce lieu en trait plus épais (**ctrl menu -Attributs**), sélectionner le deuxième type de trait.

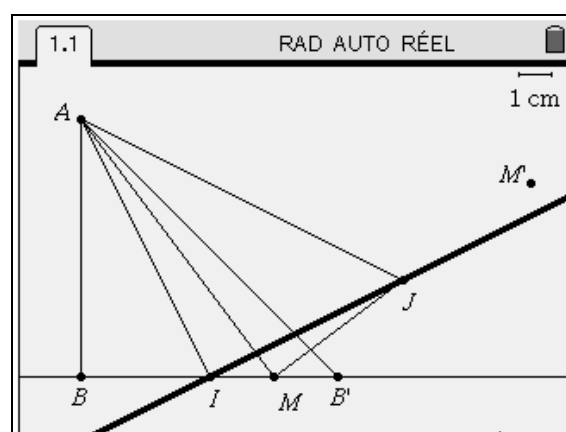
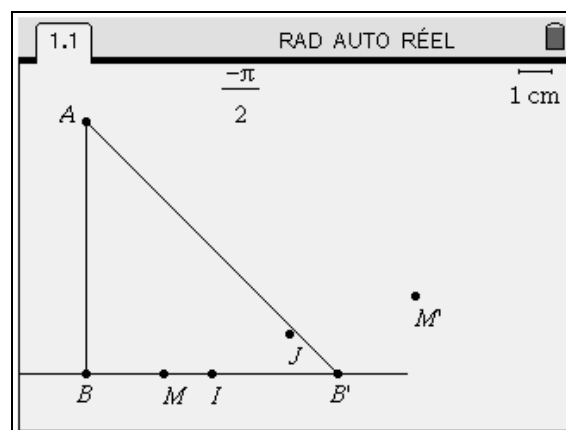
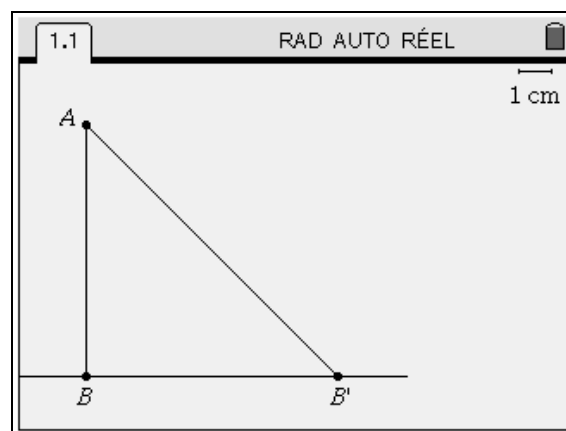
Il semble que le lieu du point J quand M décrit la droite (BB') soit la droite image de (BB') par une similitude à déterminer.

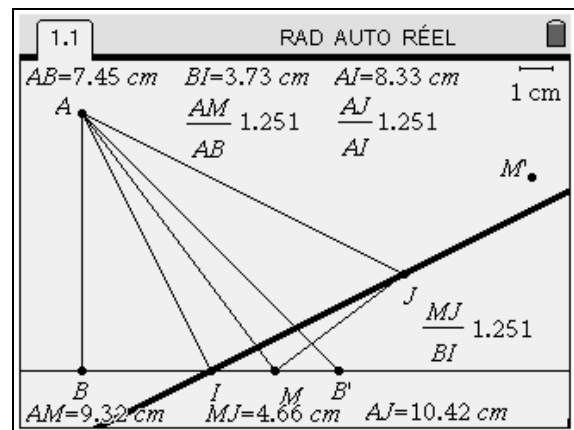
Faire afficher les **Mesures** des **Longueurs** des côtés des triangles ABI et AMJ .

Taper les quotients $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AJ}{AI}$ comme **Textes** et les

Calculer en désignant les nombres demandés)

Les triangles ABI et AMJ semblent être semblables car leurs côtés sont deux à deux proportionnels.





2) Démonstrations

Ouvrir une page **Calculs**.

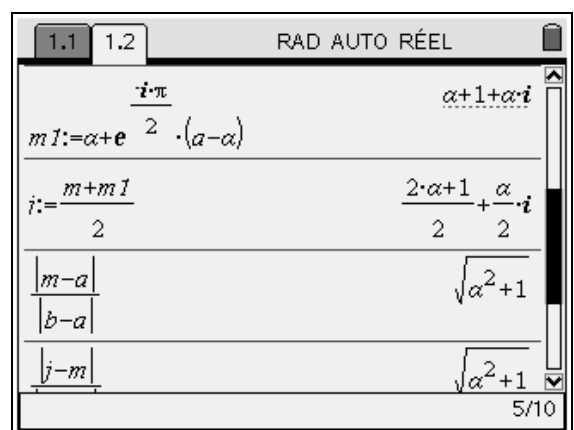
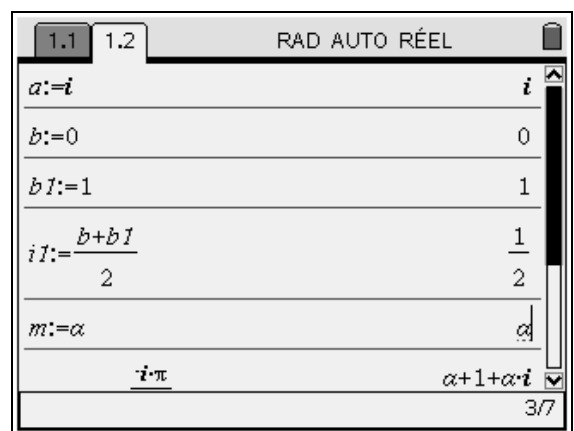
Le triangle ABB' est rectangle isocèle et $(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$, on peut prendre $(B, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BA})$ comme repère orthonormal du plan.

Les points A , B , B' et I ont alors pour affixes respectives $a = i$, $b = 0$, $b_1 = 1$, $i_1 = \frac{b + b_1}{2}$.

Soit α un réel, M appartenant à la droite (BB') a pour affixe $m = \alpha$.

M' a pour affixe $m_1 = \alpha + e^{-i\frac{\pi}{2}}(a - \alpha) = \alpha + 1 + \alpha i$ et J a pour affixe $j = \frac{m + m_1}{2}$.

Le calcul des rapports $\frac{AM}{AB}$, $\frac{MJ}{BI}$ et $\frac{AJ}{AI}$ donnant le même résultat $\sqrt{\alpha^2 + 1}$, on peut affirmer que les triangles AMJ et ABI sont semblables.



Soit S la similitude directe de centre A qui transforme B en I .

Le quotient $\frac{iI-a}{b-a}$ vaut $1 + \frac{i}{2}$, donc l'écriture complexe de S est $f(z) = a + \left(1 + \frac{i}{2}\right)(z - a) = z + \frac{1}{2} + i\frac{z}{2}$

L'image de M par S a pour affixe $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{2} + i\frac{\alpha}{2}$, soit l'affixe de J , donc l'image de M par S est J .

Le module de $1 + \frac{i}{2}$ est $\frac{\sqrt{5}}{2}$ et son argument vaut $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ soit environ $26,6^\circ$.

La similitude S a donc pour centre A , pour rapport $\frac{\sqrt{5}}{2}$ et pour angle $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

Le lieu de point J quand M décrit la droite (BB') est la droite Δ image de (BB') par la similitude S .

Le point J a pour affixe $\alpha + \frac{1}{2} + i\frac{\alpha}{2}$, donc son ordonnée y vérifie $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

La droite Δ a donc pour équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$.

TI-84 Plus calculator screen showing complex number calculations. The mode is set to RAD AUTO RÉEL. The display shows the calculation of the complex quotient $\frac{iI-a}{b-a}$ resulting in $1 + \frac{i}{2}$, and the transformation formula $f(z) = a + \left(1 + \frac{i}{2}\right)(z-a)$. The screen also shows the result of the modulus calculation $\sqrt{\alpha^2+1}$ and the argument calculation $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

TI-84 Plus calculator screen showing the calculation of the image of point M under the transformation S . The display shows the calculation of $f(z) = z + \frac{1}{2} + \frac{z}{2} \cdot i$ and $f(m) = \alpha + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} \cdot i$. It also shows the modulus calculation $\left|1 + \frac{i}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ and the argument calculation $\angle\left(1 + \frac{i}{2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

TI-84 Plus calculator screen showing the calculation of the equation of the line Δ . The display shows the calculation of the argument $\angle\left(1 + \frac{i}{2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ and the final result 26.57 degrees. It also shows the calculation of the slope $\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$ and the y-intercept $-\frac{1}{4}$.