ESD 2008 – 0703 : Lieu géométrique

Auteur du corrigé : Gilbert Julia **TI-Nspire™ CAS**

Avertissement *: ce document a été réalisé avec la version 1.4 de TI-Nspire.*

Fichier associé : esd2008_0703.tns

1. Le sujet

L'exercice proposé au candidat

On considère dans le plan deux droites Δ et Δ' sécantes en *O* et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ tels que $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}\right) = \frac{\pi}{4}$ (mod 2π). On considère deux points *A* et *B* situés respectivement sur Δ et Δ', distincts de *O* et tels que $OA = OB$. À tout point *M* du plan on associe la somme notée $s(M)$ des distances du point *M* aux droites Δ et Δ'.

1) Montrer que $s(A) = s(B) = OA.\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Soit *M* un point du segment [*AB*]. En utilisant les aires des triangles *OMA* et *OMB*, montrer que la somme $s(M)$ est indépendante de la position de *M* sur le segment [*AB*].

3) Calculer la distance *OA* afin que, pour tout point *M* du segment [*AB*], l'on ait $s(M) = 2$.

4) Le point *A* étant fixé pour satisfaire la condition de la question précédente, on note $\mathcal{L}$ le lieu des points *M* du plan tels que $s(M) = 2$. Montrer que $\mathcal{L}$ contient un rectangle dont [*AB*] est un côté.

Le travail demandé au candidat

Q1) Dégager les méthodes et les savoir-faire utilisés dans cet exercice.

Q2) Présenter une animation sur le module de géométrie dynamique de la calculatrice mettant en évidence le résultat établi dans la question 2 de l'exercice.

2. Eléments de correction

L'exercice propose l'étude d'une ligne de niveau particulière de la fonction scalaire qui à tout point du plan associe la somme des distances de ce point à deux droites sécantes données de ce plan : $M \mapsto s(M) = d(M, \Delta) + d(M, \Delta')$.

Dans l'exercice, la position relative de ces droites a été déterminée (angle de mesure π/4, mais ce paramètre n'influe pas sur le type de ligne de niveau que l'on obtient) et on cherche la ligne de niveau 2 de *s*.

La question 4 porte sur une condition *suffisante* pour qu'un point *M* ait le niveau 2, et donc appartienne à $\mathcal{L}$, en s'appuyant sur une propriété du rectangle qui émerge :
(P) : La somme des distances d'un point du pourtour d'un rectangle aux diagonales de ce rectangle est une constante. Elle est égale au quotient $\frac{\text{aire rectangle}}{\text{longueur diagonale}}$.

La démarche de résolution du problème de lieu suggérée par l'exercice peut se résumer ainsi : « Pour rechercher des points sur une ligne de niveau, on peut déterminer un point particulier ayant le niveau souhaité, puis rechercher une condition pour qu'un point ait le même niveau que lui ».

Cette démarche est cependant incomplète : on démontre seulement que l'ensemble $\mathcal{L}$ contient un rectangle. Il manque une étude réciproque: « Etant donné un point de niveau 2, est-il nécessairement sur le rectangle obtenu précédemment ? »

3. Apport de la TI-Nspire

a. Apports proposés

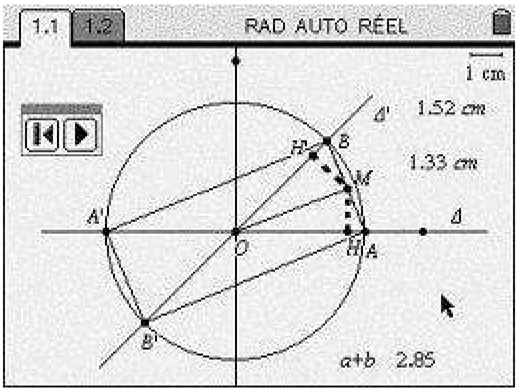
- Réalisation d'une figure conforme à l'exigence du jury.
- Pour aller plus loin : aide à une étude réciproque.

b. La figure demandée par le jury

Ouvrir une page **Graphiques & géométrie** et **Afficher le plan géométrique**.

Tracer une droite Δ (caractères grecs dans ctrl ∞β°) passant par un point O.
Construire la perpendiculaire en O à Δ, puis une bissectrice de la paire de droites. Nommer Δ' cette droite.
Tracer un cercle de centre O et noter A et A' (respectivement B et B') les points d'intersection du cercle avec Δ (respectivement Δ'. Créer le polygone $ABA'B'$, et placer un point sur objet M sur ce polygone.
Construire les projetés orthogonaux H et H' de M sur Δ et Δ'.
Mesurer les distances MH et MH' (menu 7 1).
Editer le texte « $a + b$ » (menu 1 6) et calculer l'expression (menu 1 8) en désignant pour a et pour b les distances calculées.

Sélectionner le point M et choisir menu **1 : Actions 4 : Attributs**. Modifier sa vitesse d'animation.



Pour une meilleure lecture de la figure, les attributs des segments [MH] et [MH'] sont modifiés en pointillés épais.

Observer la variation des distances et le comportement de leur somme s non seulement lorsque M parcourt un seul côté du rectangle, mais tout le pourtour du rectangle.
On peut agir sur le rayon du cercle pour montrer comment faire varier la valeur de OA et, partant, celle de s.

Cette construction a plutôt pour objectif de faire conjecturer la propriété de constance de la somme des distances d'abord d'un point de la base d'un triangle isocèle aux deux autres côtés puis, par extension, d'un point d'un rectangle aux diagonales. Elle ne règle pas pour autant le problème de lieu.

4. Pour aller plus loin.

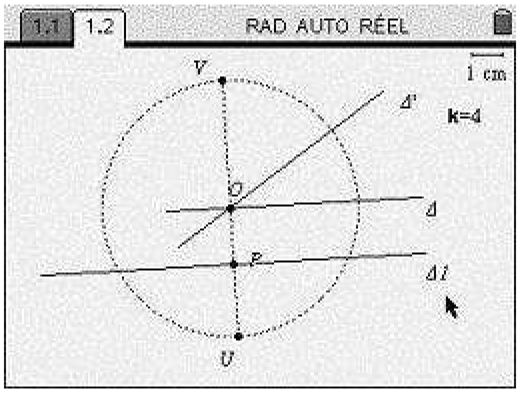
On peut se demander en quoi une figure dynamique pourrait aider, dans la recherche de l'ensemble des points M tels que $s(M) = k$, à une étude réciproque.

Prérequis

- Savoir que l'ensemble des points situés à une distance donnée k d'une droite D est constitué d'une paire de droites parallèles à D et symétriques par rapport à D.
- k étant donné, savoir construire cette paire de droites.

L'idée première est de construire une droite Δ_1 parallèle à Δ et de chercher sur cette droite quels sont les points qui appartiennent à la ligne de niveau k de f que l'on veut construire.
Cependant, il serait intéressant de pouvoir « régler » commodément la distance de Δ_1 à Δ, sachant que la distance de Δ_1 à Δ est nécessairement inférieure ou égale à k.
C'est ce que nous nous proposons de développer.

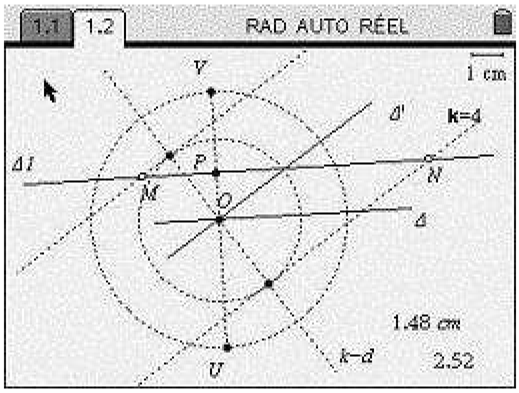
Préparation de la figure



Tracer deux droites Δ et Δ’ sécantes en O (peu importe désormais l’angle de ces droites).
Editer un nombre (4 par exemple pour une meilleure lisibilité) et le stocker en variable k).
Construire la perpendiculaire δ en O à Δ.
A l’aide par exemple de l’outil **Compas** (menu 9 7) tracer un cercle de centre O et de rayon k. Noter U et V les points d’intersection de δ avec ce cercle et créer le segment $[UV]$. Créer un point sur objet P sur ce segment. Construire enfin la droite Δ_1 parallèle en P.

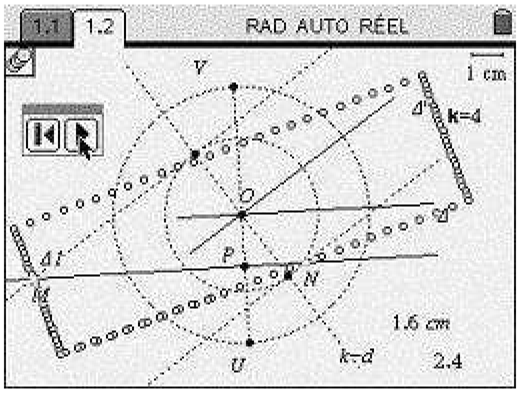
Le point P est un point pilote qui permet de régler la position de Δ_1 par rapport à Δ.

Recherche des points du lieu appartenant à Δ_1



Mesurer la distance $d = OP$ entre Δ et Δ_1. Calculer le nombre $k - d$ en éditant le texte $k - d$ puis en calculant l’expression.
Un point appartient à la ligne de niveau k de s si et seulement si sa distance à Δ’ est égale à $k - d$.
Tracer le cercle de centre O et de rayon $k - d$.
Construire la perpendiculaire en O à Δ’ et faire apparaître ses deux points d’intersection avec le cercle. Les parallèles à Δ’ passant par chacun de ces points coupent Δ_1 en M et en N respectivement. Les points M et N sont à la distance d de Δ et à la distance $k - d$ de Δ’. Ils appartiennent à la droite Δ_1 et à la ligne de niveau k de s. Ce sont les points cherchés.

Conjecture sur la nature du lieu des points M et N

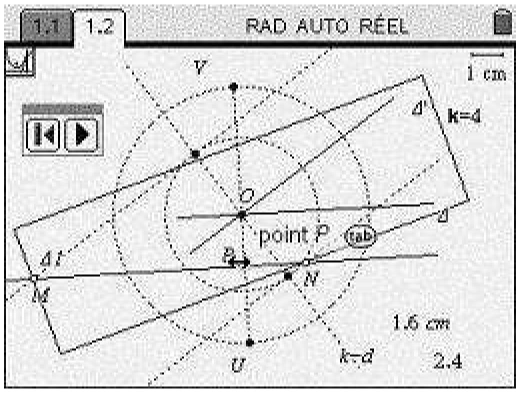


Modifier les attributs du point P et animer ce point « animation en va-et-vient ». Observer le déplacement des points M et N.
Stopper l’animation à l’aide de et activer l’outil (menu 5 3) **Trace géométrique** à propos de chacun des deux points M et N. Relancer l’animation.

On peut conjecturer que M et N décrivent chacun deux côtés d’un rectangle qu’il reste à identifier.

Validation du lieu des points M et N

Supprimer la trace géométrique (menu 5 4) et activer l'outil « lieu » (menu 9 6).
Désigner *M* et le point pilote *P*. De même pour *N*.



La résolution du problème pourrait être scindée en deux parties, et un apport de la calculatrice pourrait intervenir à deux moments de l'étude :

Partie 1 : Etude de la propriété métrique (P) des points d'un rectangle, illustrée par la figure demandée par le jury (le rectangle est donné). Une première synthèse pourrait être faite à son propos.

Partie 2 : Le problème de lieu proprement dit, mais sans fournir d'indication sur la nature géométrique du lieu, illustré par la deuxième figure. Le rectangle apparaît d'abord en tant que *trace géométrique*.

La recherche serait à ce moment relancée selon la démarche suivante :

- Identifier le rectangle (R) que le logiciel laisse conjecturer (déterminer quels sont ses sommets).
- Engager les élèves dans une démarche réciproque. Par exemple, si *M* est un point du lieu, faire tracer la demi-droite [*OM*). Cette dernière coupe l'un des côtés du rectangle (R) en un point M_1 qui va vérifier la propriété métrique des points de (R). Faire prouver que *M* et M_1 ne sont qu'un seul et même point.
- Conclure sur la nature de $\mathcal{L}$ par « double inclusion ».