

EP 065 - 2009 : Distance minimale point-courbe

Auteur du corrigé : Alain SOLEAN

TI-Nspire™ CAS

Avertissement : ce document a été réalisé avec la version 1.7

Fichier associé : EP065_2009_DistanceMinimale_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 065 de l'épreuve pratique 2009 – Distance minimale d'un point à une courbe

Énoncé

Dans un repère orthonormal d'origine O , on considère la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction logarithme népérien.

On s'intéresse à la distance OM lorsque M parcourt \mathcal{C} . Le but de l'exercice est de préciser si cette distance peut être rendue minimale et de caractériser le (ou les) point(s) M , s'il en existe, situé(s) sur \mathcal{C} et rendant cette distance minimale.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure permettant d'explorer cette situation.
2. Cette distance semble-t-elle minimale pour un (ou plusieurs) point(s) particulier(s) de \mathcal{C} ? Si oui donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette plus petite distance et de l'abscisse de ce(s) point(s).
3. Tracer la droite (OM) ainsi que la tangente en M à la courbe \mathcal{C} . Que semble-t-il se passer lorsque M est positionné sur la courbe \mathcal{C} de sorte que la distance OM soit minimale ?

Partie B

4. Quelle relation doit vérifier l'abscisse x_0 d'un point M_0 en lequel la distance OM est minimale ?
5. Prouver la conjecture élaborée dans la question 3.

Production demandée

- Les différentes étapes des stratégies prévues pour répondre aux questions 4. et 5.
- La mise en forme de l'une de ces étapes.

Compétences évaluées

- Tracer une courbe et la tangente en un point mobile de cette courbe.
- Coefficient directeur de la tangente en un point d'une courbe.
- Étude des variations d'une fonction.
- Condition d'orthogonalité de deux vecteurs.

2. Corrigé

Partie A

1) Ouvrir une page **Graphiques & géométrie**

Tracer la fonction f_1 définie par : $f_1(x) = \ln(x)$.

Régler la fenêtre :   (**Fenêtre**)  (**Réglages de la fenêtre**).

Choisir **XMin** = - 1 ; **XMax** = 6 ; **YMin** = -2 ; **YMax** = 4.

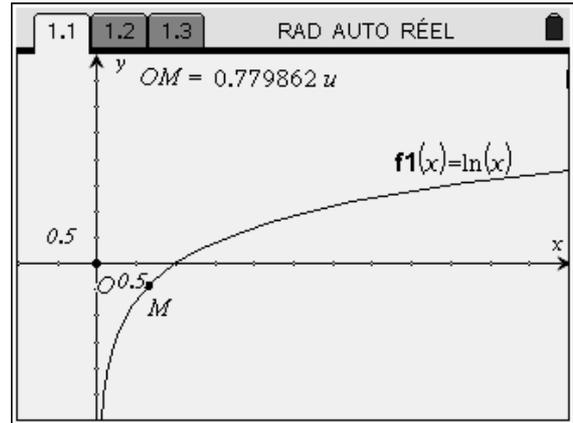
Placer un point M sur la courbe :

(Points et droites) (Point sur).

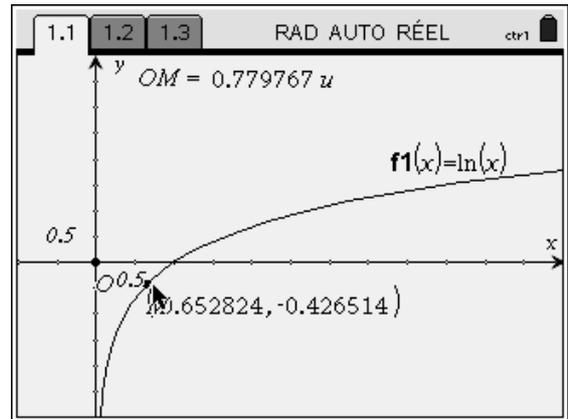
Demander l'affichage de la distance OM :

(Mesures) (Longueur).

Remarque : sur l'écran ci-contre, on a caché les coordonnées du point M et on a ajouté le texte « OM= » devant la valeur de OM.



2) Il semble que la distance OM soit minimale pour un point seulement. L'abscisse de ce point M est égale à environ 0,65 et la distance OM à environ 0,78.



3) Construction de la droite OM.

(Points et droites) (Droite).

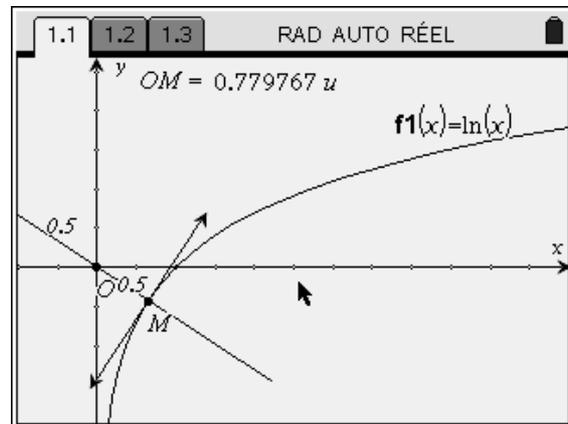
Construction de la tangente en M à C.

(Points et droites) (Tangente).

Pour obtenir la conjecture, il faut modifier la fenêtre en adoptant un repère orthonormal.

(Fenêtre) (Zoom carré).

On peut alors conjecturer que la droite (OM) est perpendiculaire à la tangente en M à C.

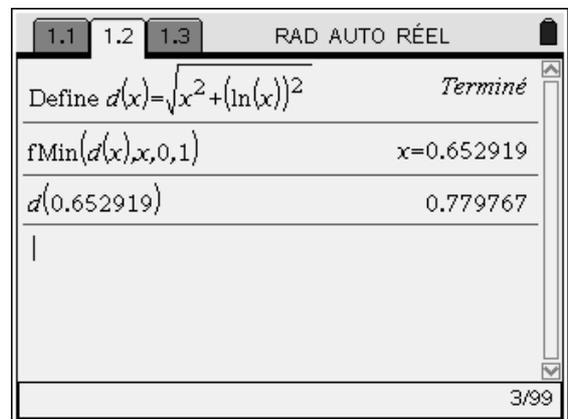


Partie B

4) Le point M ayant pour coordonnées (x ; ln(x)), la distance OM est : $d(x) = \sqrt{x^2 + (\ln(x))^2}$.

Ouvrir une page **Calculs**.

Définir la fonction d ; demander la valeur du minimum de d(x) et demander la valeur de d pour cette valeur du minimum (ces valeurs confirment celles déterminées graphiquement).



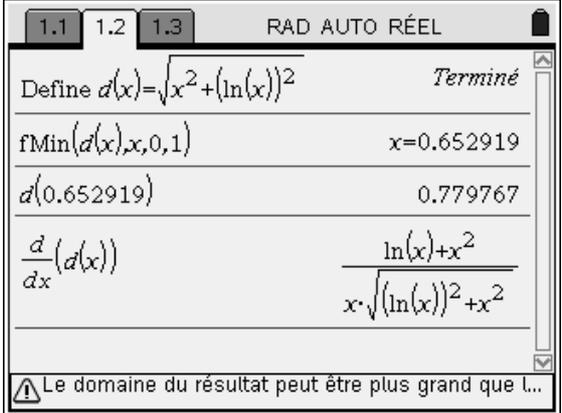
5) Pour déterminer la relation vérifiée par x_0 , calculons la dérivée de d :

  (Analyse)  (Dérivée).

Sur $]0; +\infty[$, cette dérivée change de signe lorsque $x_0^2 + \ln(x_0) = 0$.

La droite (OM_0) a pour coefficient directeur $\frac{\ln(x_0)}{x_0}$ et la tangente en M_0 à \mathcal{C} a pour coefficient directeur $\frac{1}{x_0}$.

Si $x_0^2 + \ln(x_0) = 0$ alors $\frac{\ln(x_0)}{x_0^2} = -1$; donc les deux droites (OM_0) et la tangente sont bien perpendiculaires.



The screenshot shows a TI-84 Plus calculator screen with the following content:

- Mode: 1.1, 1.2, 1.3 (RAD AUTO RÉEL)
- Define $d(x) = \sqrt{x^2 + (\ln(x))^2}$ Terminé
- fMin($d(x), x, 0, 1$) $x = 0.652919$
- $d(0.652919)$ 0.779767
- $\frac{d}{dx}(d(x))$ $\frac{\ln(x) + x^2}{x \cdot \sqrt{(\ln(x))^2 + x^2}}$
- Warning: Le domaine du résultat peut être plus grand que l...