

NOMBRE DÉRIVÉ ET FONCTIONS PUISSANCES

Auteur : Christian Brucker

TI-Nspire™ CAS

Mots-clés : calcul formel, fonctions puissances, nombre dérivé, fonction dérivée.

Fichiers associés : dérivée_fonctions_puissances1.tns, dérivée_fonctions_puissances2.tns

1. Objectifs

- Démontrer les formules qui donnent les dérivées des fonctions puissances.
- Mettre en œuvre la définition du nombre dérivé.
- Mettre en équation des contraintes.
- Résoudre un système.
- Utiliser le calcul formel pour sa résolution.

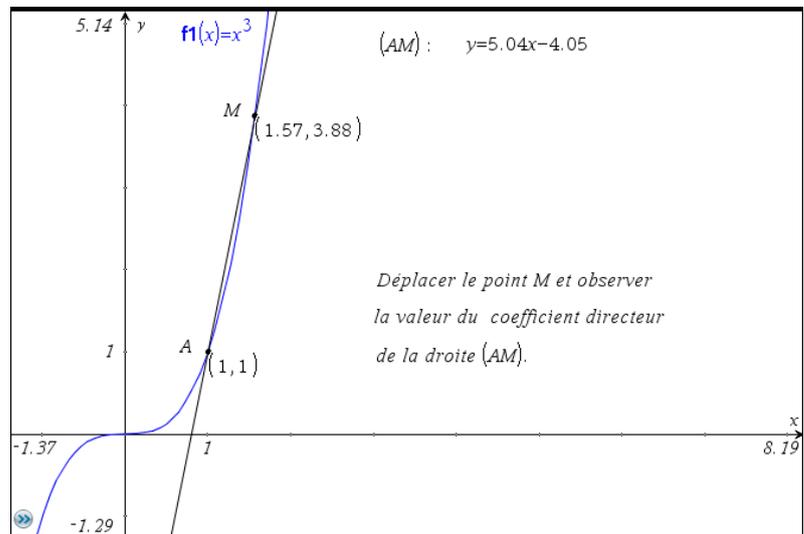
2. Énoncé

1) Calculer le nombre dérivé de la fonction $x \mapsto x^3$ en $a = 1$.

2) Calculer le nombre dérivé de la fonction $x \mapsto x^3$ en a . Quelle est la fonction dérivée de $x \mapsto x^3$?

3) Quelle est la fonction dérivée de $x \mapsto x^{10}$?

4) Généraliser à $x \mapsto x^n$ pour n entier naturel non nul.



3. Commentaires

Cette activité permet, après avoir défini le nombre dérivé d'une fonction en une valeur, d'introduire la fonction dérivée.

Il pourra être nécessaire de rappeler la formule $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

La première question peut être conduite sans calcul formel. Cela permettra à l'élève

- de revoir la définition du nombre dérivé,
- de se rendre compte que le calcul de $(1+h)^3$ n'est pas aisé.

Pour répondre à la deuxième question, une mise en commun, classe entière, sera certainement nécessaire.

Pour la troisième question, le calcul formel est indispensable, mais uniquement pour le calcul de $(a+h)^{10}$.

Il sera peut-être intéressant de montrer aux élèves que le calcul de la limite peut se faire sans calculatrice.

Toute l'activité peut être complétée par l'illustration graphique du nombre dérivé et de la fonction dérivée.

Pour la dernière question, il ne sera pas possible d'expliquer aux élèves pourquoi TI-Nspire arrive à calculer la limite : l'exposant est considéré par la calculatrice ou le logiciel comme un nombre réel quelconque, alors que pour que x^n ait un sens mathématique en classe de première, il est censé être uniquement entier. Ils devront patienter jusqu'en terminale pour découvrir les fonctions exponentielles.

4. Conduite de l'activité

1) Le rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ne

peut être nommé A pour ne pas entrer en conflit avec le paramètre a.

Ici ce rapport a été nommé r1(h).

Ce rapport est simplifié par TiNspire mais l'avertissement  apparaît.

Il est dû à l'ensemble de définition de r1 (h ≠ 0).

Calcul du nombre dérivé de la fonction cube en a = 1.

f(x):=x³

r1(h):= $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ Terminé

r1(h) ▶ h²+3·h+3 

lim (r1(h)) ▶ 3

h→0 

2) En revanche, pour répondre aux différentes questions sur des pages d'un même classeur, il faudra choisir des noms différents pour le rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Calcul du nombre dérivé de la fonction cube en a.

f(x):=x³ Terminé

r2(h):= $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ Terminé

r2(h) ▶ 3·a²+3·a·h+h² 

lim (r2(h)) ▶ 3·a²

h→0 

3) Le calcul formel est ici indispensable pour le calcul de $\frac{(a+h)^{10} - (a)^{10}}{h}$.

Calcul du nombre dérivé de la fonction puissance 10 en a.

g(x):=x¹⁰

r3(h):= $\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$ Terminé

r3(h) ▶ 10·a⁹+45·a⁸·h+120·a⁷·h²+210·a⁶·h³+252·a⁵·h⁴+210·a⁴·h⁵+120·a³·h⁶+45·a²·h⁷+10·a·h⁸+h⁹ 

lim (r3(h)) ▶ 10·a⁹

h→0 

4) Le Copier/Coller rend ici bien des services.

Calcul du nombre dérivé de la fonction puissance 10 en a.

i(x):=xⁿ Terminé

r4(h):= $\frac{i(a+h)-i(a)}{h}$ Terminé

r4(h) ▶ $\frac{(a+h)^n - a^n}{h}$

lim (r4(h)) ▶ aⁿ⁻¹·n

h→0 

Présentation de toute l'activité sur une seule page de classeur avec utilisation de l'éditeur mathématique

L'éditeur mathématique de la Ti-Nspire est très intéressant car il suffit de modifier les valeurs de a et n pour répondre aux différentes questions.

En revanche, cette méthode est, sans doute, plus adaptée au professeur qui souhaite utiliser un vidéoprojecteur pour montrer les calculs à la classe entière qu'aux élèves quand ils résolvent l'exercice.

Calcul du nombre dérivé de la fonction puissance n en a . Dans un premier temps ce fichier donne le nombre dérivé de la fonction cube en $a = 1$.

On affecte 1 à a :

"a:=1" **a:=1** ▶ 1

Pour calculer le nombre dérivé en une valeur a quelconque, il faut insérer ici une boîte "saisie maths" avec l'instruction "delvar a" :

☐

L'instruction ci-dessous permet de modifier l'exposant de la fonction puissance.

On affecte 3 à n :

"n:=1" **n:=3** ▶ 3

Pour calculer le nombre dérivé pour une puissance n quelconque, il faut insérer ici une boîte "saisie maths" avec l'instruction "delvar n" :

☐

$f(x) := x^n$ ▶ Terminé

$r(h) := \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ▶ Terminé

$r(h) \rightarrow h^2 + 3 \cdot h + 3$ ⚠

$\lim_{h \rightarrow 0} (r(h)) \rightarrow 3$