Inga vanliga medelvärden

Vanligtvis när vi pratar om medelvärden så menar vi det *aritmetiska* medelvärdet. I en del sammanhang så kan man dock inte räkna med det. Vi går här igenom olika sätt att tänka och visar på hur man med algebraiska, geometriska och grafiska representationer kan åskådliggöra begreppet medelvärde.

Denna övning kan till stora delar användas i kurs 1. Där behandlas ju grundläggande algebra och begrepp som proportionalitet och linjära samband. Vissa delar i algebran som behandlas passar dock kanske bättre i kurs 2

Ett exempel:

Tänk dig att du åker fram och tillbaka till en plats och att du håller hastigheten 100 km/h på resan dit och bara 50 km/h på resan tillbaka. Vad är din medelhastighet för hela resan?

Man kan lätt tro att medelhastigheten totalt blir 75 km/h. Nu kör man under längre tid med den lägre hastigheten och då blir svaret något annat.

Om sträckan är 100 km så tar det en timme att åka till platsen men 2 timmar att åka tillbaka. 3h timmar totalt alltså. Medelhastigheten blir då

200/3≈ 67km/h

Vi gör nu en algebraisk beräkning;

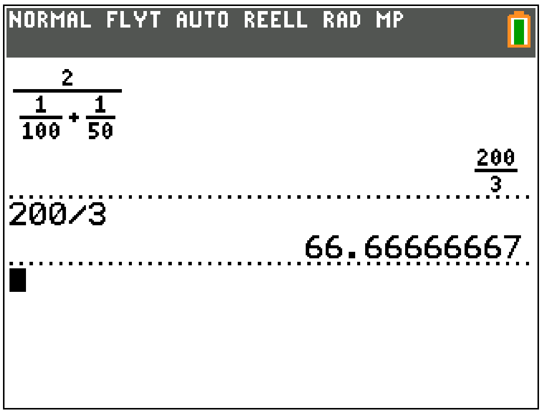
Låt sträckan vara s och hastigheterna v_1 och v_2. Färdtiderna blir då

$t_1 = \frac{s}{v_1}$ respektive $t_2 = \frac{s}{v_2}$ och medelvärdet blir då

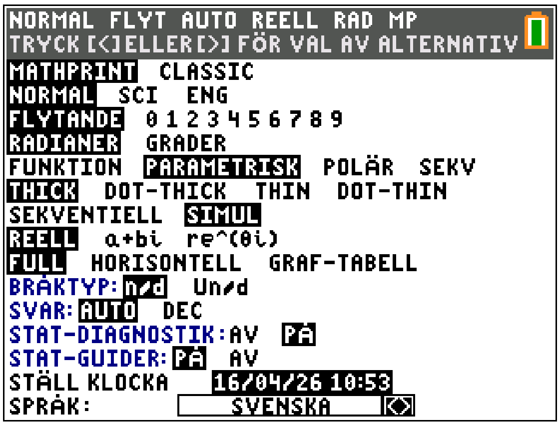
$$\frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

Detta medelvärde kallas *harmoniskt* medelvärde och förekommer i olika sammanhang.

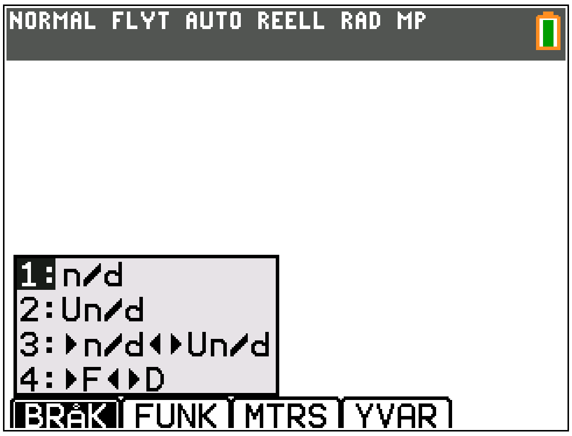
Nu räknar vi ut detta medelvärde enligt uttrycket ovan:



Lägg märke till att vi har använt inställningen MATHPRINT i inställningarna (tryck på MODE)



Om du trycker på ALPHA Y= (som är ett snabbval) får du upp menyn för att skriva bråk.



Den första problemställningen är en klassiker.

Vi kan också i sådana här problem komma fram till en *ekvation* som man sedan kan lösa.

"Min medelhastighet med cykeln på hela sträckan fram och tillbaka var 22,5 km/h. På ditvägen vet jag att hastigheten var 30 km/h. Hur stor var den egentligen på tillbakavägen när det gick trögt?"

Uttrycket för medelhastighet är ju

$$\frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$$

Så vi ska alltså lösa ekvationen

$$\frac{2}{\frac{1}{30}+\frac{1}{v_2}}=22{,}5$$

Detta är kanske en ganska svår ekvation att lösa. Vi förenklar i steg:

Vi sätter uttrycket i nämnaren på gemensamt bråkstreck, dvs. vi gör liknämnigt

$$\frac{2}{\frac{v_2+30}{30\cdot v_2}}=22{,}5$$

Vänsterledet kan skrivas om och då får vi

$$\frac{2\cdot 30v_2}{v_2+30}=22{,}5$$

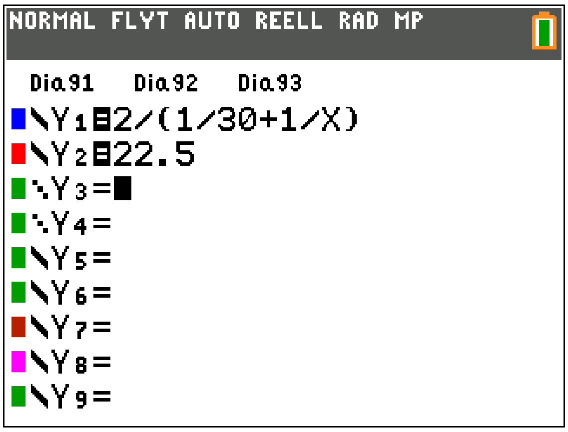
Vi förlänger båda led i ekvationen med v_2+30:

$60v_2=22{,}5\cdot(v_2+30)$

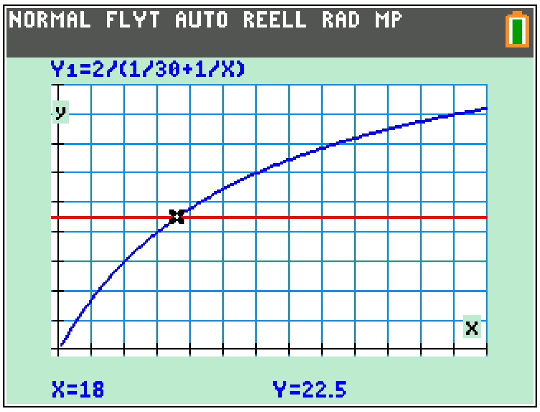
$37{,}5v_2=675$

Finns det något annat sätt att beräkna detta utan att behöva lösa en besvärlig ekvation.

Jo, vi kan plotta vänsterledet och högerledet som två funktioner och se var de skär varandra. Skriv in båda leden som två funktioner:

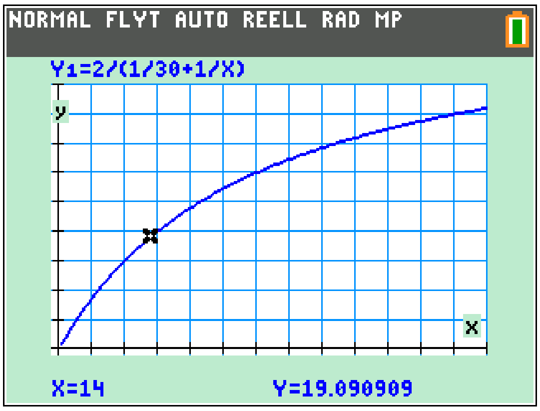


Med ett bra fönster plottar vi sedan båda funktionerna och ser var de skär varandra.



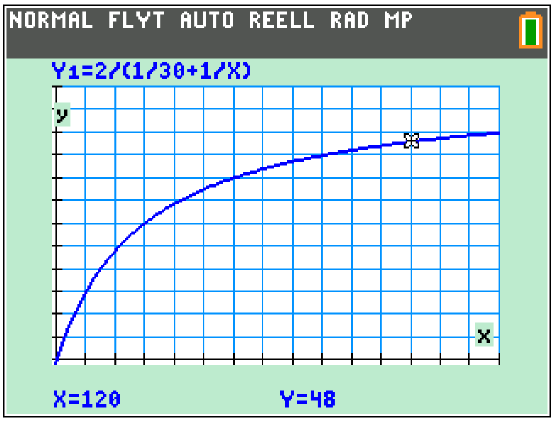
Vi ser att de skär varandra när x =18.

Finessen med att plotta funktionen är att du grafiskt/numeriskt kan beräkna medelhastigheten för andra värden.

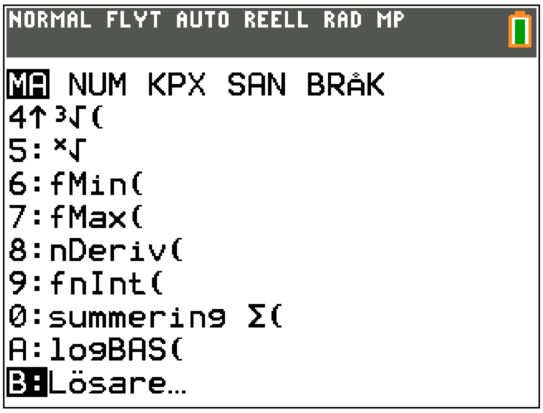


Här ser vi att medelhastigheten blir ca 19 km/h när hastigheten på återresan är 14 km/h. Hastigheten på ditresan är ju konstant 30 km/h.

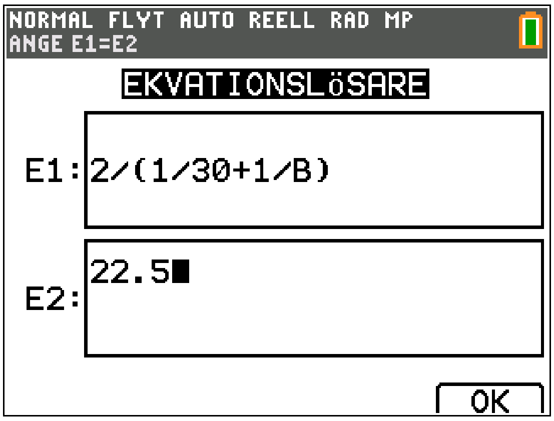
Så här ser det ut om hastigheten på återresan är 120 km/h. Då blir medelhastigheten 48 km/h. Av kurvans utseende kan man dra slutsatsen att medelhastigheten inte ändras så mycket om du höjer hastigheten på återresan från ett högt värde. Kurvan planar ju ut. Vad blir medelhastigheten om hastigheten på återresan är *extrem*?



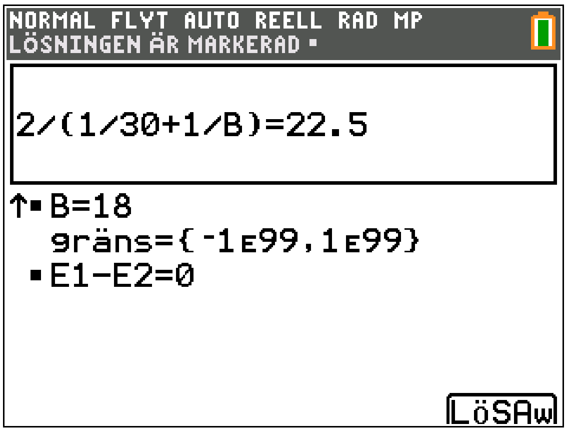
Det finns ett tredje sätt att lösa problemet. Vi använder då räknarens *ekvationslösare*. Tryck på [MATH]-knappen, välj sedan Lösare i menyn.



Då kommer fönster upp där du kan skriva in ekvationens vänster och högerled. Vi måste döpa det vi ska räkna ut till något. Vi har här angett att B står för hastigheten på återresan.

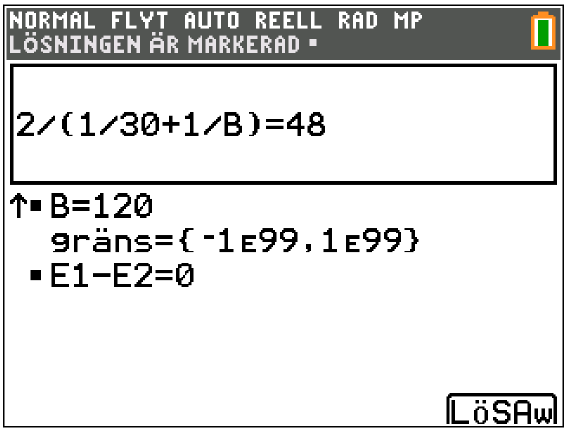


Tryck nu på [ALPHA][SOLVE]. Då får vi upp ett fönster där vi ska gissa ett värde på B. Skriv t.ex. 15 och låt markören stå kvar på raden. Tryck nu på [ALPHA][SOLVE] igen.



Nu får vi resultatet 18.

Du kan nu gå upp och ändra dina värden. Du har ju här två kända värden och löser ut för det tredje.

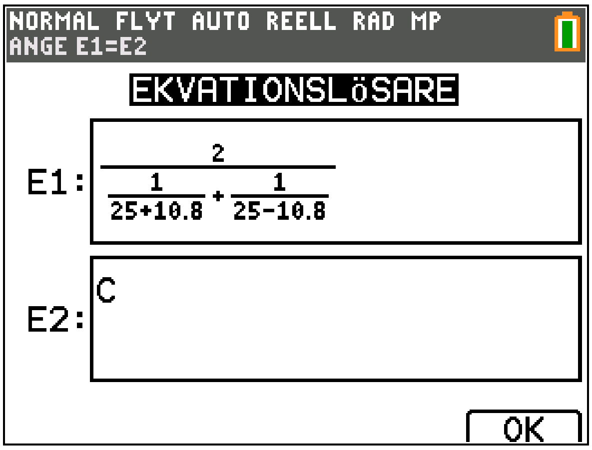


På denna sida har vi en ganska intressant frågeställning. Passar kanske bäst för kurs 2.

Tänk dig att du cyklar en sträcka till en viss plats och att du sedan cyklar tillbaka. Du håller samma hastighet, 25 km/h, hela tiden. Sedan gör du om samma cykeltur men nu blåser det medvind 3 m/s (=10, 8 km/h) på ditvägen och motvind 3 m/s på hemvägen. Hur blir din medelhastighet när det blåser?

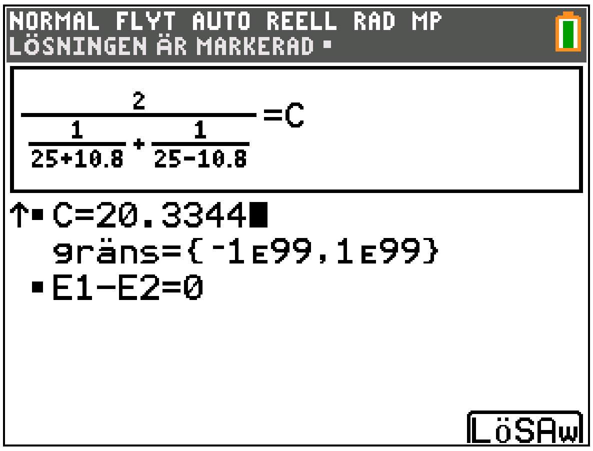
Vi använder ekvationslösaren. På ditresan blir hastigheten 25+10,8 km/h och på återresan 25-10,8 km/h.

Problemet bygger på att vi tjänar lika mycket i hastighet på medvinden som vi förlorar på motvinden.



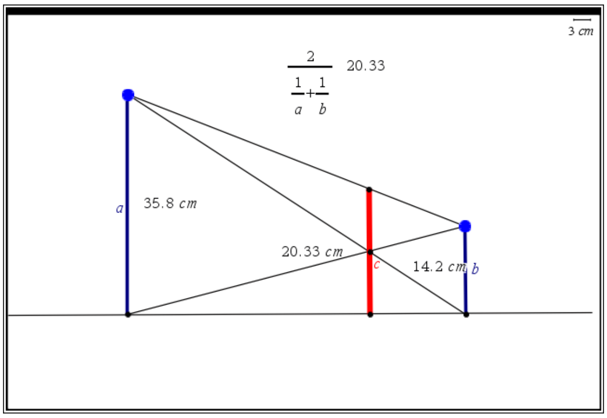
Om du trycker på [ALPHA][Y=] (som är ett snabbval) får du upp menyn för att skriva bråk. Så har vi gjort här. Klart snyggare. Vi kallar den medelhastighet vi ska beräkna till C.

Vi gissar ett värde på C och trycker på [ALPHA][SOLVE].



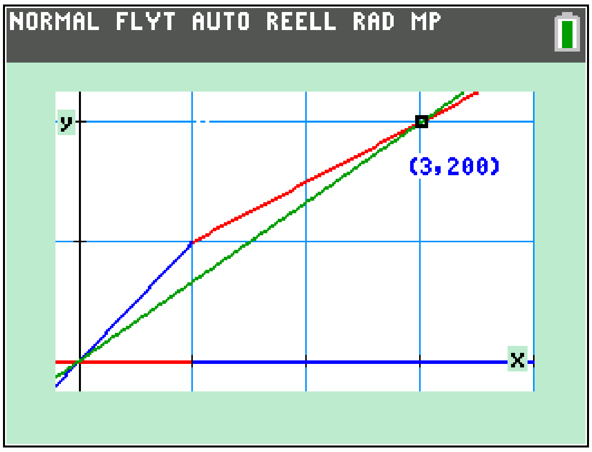
Vi får ett värde på 20,3 km/h. Här gäller inte principen ”det du vinner på karusellen förlorar du på gungorna”.

Här har vi en fiffig geometrisk konstruktion som löser problemet med hastigheterna. Den röda sträckan blir 20, 3 cm.



Här ett annat sätt att visa situationen. Från problemet där du åker fram och tillbaka till en plats och att du håller hastigheten 100 km/h på resan dit och bara 50 km/h på resan tillbaka. Vad är din medelhastighet för hela resan?

Vi har alltså ett s.k. *s*-*t*-diagram. De blå och röda linjerna representerar de verkliga resorna och den gröna linjen en tänkt resa med den beräknade medelhastigheten. Linjernas lutning anger hastigheten.



En annan variant av samma typ av problem. Vi tittar på två olika varianter av problemet.

Snabba Wilma klipper ensam gräsmattan på två timmar. Lata Willy gör det på fyra timmar. De ska nu göra det samtidigt och de börjar i var sin ände av gräsmattan och börjar klippningen. Hur lång tid tar det om de hjälps åt?

Det här är väl egentligen inget problem om medelvärden av hastigheter. De klipper ju samtidigt och då blir deras totalhastighet större än de enskilda hastigheterna. Vi får addera dem. Vi säger att gräsmattans area är 1000 m^2.

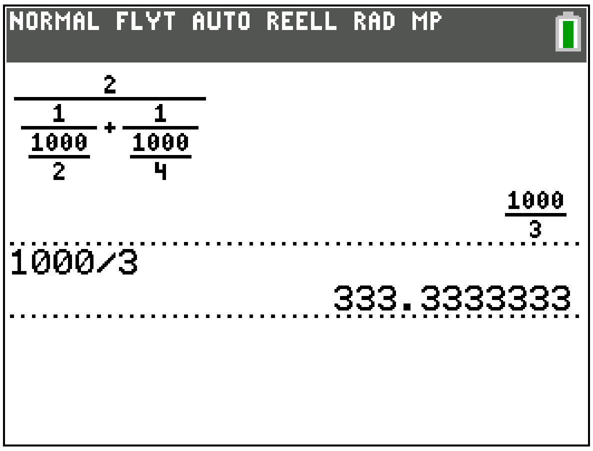
Totalhastigheten blir 1000/2 + 1000/4 = 750 m^2/h.

Det betyder att det tar 1000/750 h =4/3 h, vilket är 1 timme och 20 minuter.

Nu tänker vi oss att de turas om att klippa gräset. Hur stor blir medelhastigheten då? Gräsmattans area är fortfarande är 1000 m^2. När de klippt varsin gång har de klippt 2000 m^2 och det tar 2 h + 4 h = 6 h. Det betyder att deras medelhastighet är

$$\frac{2000}{6} \approx 333 \text{ m}^2/\text{h}$$

Vi får samma resultat om vi beräknar det harmoniska medelvärdet:



Du kan läsa mer om medelvärden i en artikel i tidskriften Nämnaren:

http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/2023_11_4.pdf

Vi avslutar denna aktivitet med ett ganska klurigt problem om hastigheter:

Två personer behöver komma till en stad, som ligger 40 km bort, så fort som möjligt. Nu har de bara en cykel. Person A kan bara röra sig per fot med en hastighet av 4 km /h medan person B kan hålla hastigheten 8 km/h. Båda kan hålla en hastighet på 16 km/h när de cyklar men bara en i taget kan använda cykeln.

Vilken är den kortaste tiden de behöver för att nå staden?

En idé är förstås att låta den långsamma personen, A, cykla hela sträckan och den snabbare personen, B, promenera hela sträckan. Då kommer A fram först. För B, som promenerar med hastigheten 8 km/h tar det då 40/8 h = 5 h. Finns det någon bättre strategi?

Här en strategi: Vi låter den långsamma personen A cykla en viss sträcka *x*. Därefter lämnar hon cykeln och promenerar resten av sträckan, dvs. 40-*x*. Vi kan då ställa upp en ekvation för den tid det tar. Vi kallar denna tid för *y*. Vi får

$$y = \frac{x}{16} + \frac{40-x}{4}$$

Ekvationen kan förenklas till:

$$10 - \frac{3}{16} \cdot x$$

Vi gör likadant för person B och får då en ekvation till. Då har vi två ekvationer och två obekanta. Ett ekvationssystem alltså och det kan vi lösa.

Den övning du ska göra nu är att fortsätta enligt ovan och lösa problemet. Du kan lösa det algebraiskt, grafiskt eller använda ekvationslösaren.

Nedan visar vi ett tid-vägdiagram för lösningen.