

Nombre: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

## Actividad NUMB3RS: Sin grandes expectativas

Cuando Charlie explica el contenido de la libreta del muerto, señala que el hipódromo emplea un sistema de apuestas *pari-mutuales* en el que las probabilidades relativas de ganar varían con el monto apostado a cada caballo. Este sistema no sólo calcula los pagos proporcionales para los jugadores, sino que garantiza una ganancia para los dueños del hipódromo al retirar inicialmente cierta proporción del dinero apostado antes de repartir el restante entre los ganadores. Esta segunda parte es lo que hace de las apuestas una mala inversión, ya que a la larga el jugador siempre perderá.

Esta actividad examina la *expectativa matemática* del jugador. Esto es el monto que una persona puede esperar como ganancia o a la larga (lo que es más probable) como pérdida en promedio.

Considera el caso de un juego sencillo y equitativo. Supongamos que dos personas lanzan una moneda y que cada una apuesta \$1. Si la moneda cae en cara, gana la primera persona. Si cae en cruz, gana la segunda. La expectativa de cada persona se halla multiplicando la probabilidad de cada resultado por el monto que se gana o pierde con dicho resultado y luego sumando los productos. En este ejemplo, una persona que escoge cara ganará  $\frac{1}{2}$  de las veces y perderá  $\frac{1}{2}$  de las veces. Si  $P(E)$  denota la probabilidad del evento  $E$ , entonces la expectativa es  $P(\text{cara})(\$1) + P(\text{cruz})(-\$1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ . A la larga, cada jugador debe ganar y perder aproximadamente el mismo número de veces, con una "ganancia" esperada de \$0.

En muchos casos no todo el dinero se devuelve a los participantes, de modo que la expectativa puede ser negativa. Es decir, cada jugador puede prever que a la larga perderá.

1. Supongamos que en cierto juego un jugador lanza un dado corriente de seis caras. Si el dado cae en 6, el jugador recibe \$4. Si cae en cualquier otro número, pierde \$1. ¿Cuál es la expectativa matemática del jugador?
2. Supongamos que en cierta lotería estatal los jugadores escogen un número de tres dígitos de 000 a 999 y que ganan si sale ese número.
  - a. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?
  - b. Supongamos que el premio es \$499 (el jugador recibe \$500 menos el costo del boleto que es \$1). El jugador pierde \$1 por todos los otros números. ¿Cuál es la expectativa matemática del jugador?
3. Una rueda americana de ruleta trae 38 números. Supongamos que una persona apuesta \$1 en cierto número. La rueda gira, y si sale el número escogido, la persona gana \$35; de lo contrario, pierde su apuesta de \$1. ¿Cuál es la expectativa matemática?

4. Las probabilidades y las expectativas matemáticas tienen muchas aplicaciones fuera de los juegos de azar. En la industria de seguros (ver las "Extensiones") hay actuarios que calculan cuánto cobrar para que la compañía sea competitiva a la vez que obtenga ganancias. Supongamos que para personas de cierta edad, la probabilidad de morir en el próximo año es  $\frac{1}{200}$  y que un cliente de dicha edad compra una póliza de seguros de \$1,000 por \$7. ¿Cuál es la expectativa matemática del cliente?
  
5. A veces la expectativa matemática es positiva. Supongamos que un fabricante recibe \$3 de ganancia por cada artículo vendido, pero pierde \$12 por cada uno que sale defectuoso. Si 1% de los artículos son defectuosos, ¿cuál es la expectativa matemática (ganancia)?
  
6. La expectativa matemática también se puede aplicar a la lucha contra el crimen. Para que un castigo (como una multa) sea disuasivo, la probabilidad de caer multiplicada por la multa debe ser superior a la "ganancia" prevista por el delincuente. Por ejemplo, supongamos que el estacionamiento de un estadio deportivo cobra \$10, pero que hay una calle enfrente donde está prohibido estacionarse.
  - a. Si la mitad de las personas que se estacionan ilegalmente reciben una multa y la multa es de \$5, ¿es esto un buen elemento disuasivo? ¿Por qué?
  - b. ¿Y si la multa es de \$100?
  - c. ¿Qué multa mínima te parece que sería justa pero a la vez disuasiva? ¿Por qué?
  - d. ¿Qué pasa si el castigo incluye algo más que una multa, por ejemplo que una grúa se lleve el auto? ¿Qué factores podrían emplearse para determinar la expectativa?

*El objeto de esta actividad es dar a los estudiantes un vistazo breve y sencillo de un tema matemático muy extenso. TI y NCTM lo invitan a usted y a sus estudiantes a aprender más sobre este tema con las extensiones que se ofrecen abajo y con su propia investigación independiente.*

## Extensiones

### Introducción

Desde el punto de vista del "jugador", la mayoría de las aplicaciones en esta actividad suponen una expectativa negativa. Desde el punto de vista del dueño de un casino o de una compañía de seguros, las expectativas serían positivas, ya que la pérdida del jugador es ganancia para ellos. Los agricultores y los administradores de balnearios, por ejemplo, ganan o pierden dinero dependiendo del estado del tiempo, de modo que para ellos la probabilidad de tiempo bueno o malo reemplaza la probabilidad de un número ganador al calcular la ganancia prevista.

### Recursos adicionales

Esta actividad trata de un aspecto de las apuestas pari-mutuales. El otro aspecto (dividir las ganancias entre los ganadores) se incluye y aplica al jai-alai en:

<http://www.cs.sunysb.edu/~skiena/jaijai/excerpts/node15.html>

Para un escrito académico que relaciona las apuestas pari-mutuales con los mercados financieros, ver: <http://dimacs.rutgers.edu/Workshops/Markets/pennock.pdf#search=%22pari-mutuel%22>

### Para el estudiante

La repartición justa del dinero apostado tiene un papel importante en la historia de las matemáticas. Dos matemáticos franceses, Blaise Pascal y Pierre de Fermat, analizaron el siguiente problema en una serie de cartas en el siglo diecisiete. Supongamos que dos personas participan en un juego en el cual ambas tienen la misma posibilidad de ganar un punto, y la primera persona que gane tres puntos de cinco posibles es la ganadora. El juego se interrumpe cuando un jugador va ganando 2 – 1. ¿Cuál sería una manera justa de repartir el dinero apostado?

Haz una conjetura sobre la respuesta. Escribe un argumento basado en tus propios razonamientos en el que des las razones por las cuales tu conjetura es correcta. Luego, investiga los argumentos de Pascal y Fermat.

### Tema relacionado

Un *actuario* es un profesional de las matemáticas aplicadas que emplea la probabilidad para fijar las tarifas para compañías de seguros. Este trabajo suele figurar entre los más lucrativos y atractivos (ver cualquier edición de *Jobs Rated Almanac*). Este campo podría resultar muy interesante para estudiantes que gustan de las matemáticas y disfrutan aplicándolas. Para obtener más información, incluyendo información específica para estudiantes de secundaria y exámenes de muestra para ser actuario, ver <http://www.beanactuary.org>