F1f – CURIEUSES REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

TI-89 – Voyage 200

Mots-clés : représentation graphique, ensemble de définition, nombres complexes.

1. Objectifs

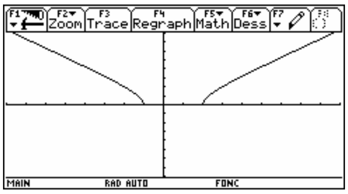
Comprendre les représentations graphiques données par la calculatrice dans quelques situations où ses affichages semblent incohérents.
Mieux maîtriser et optimiser son emploi et ainsi, redonner confiance à l'utilisateur.

2. Énoncé

Voir fiche élève.

3. Résolution

1) a) L'ensemble de définition de f est : $]-\infty\,;-1] \cup [2\,;+\infty[$.
Le tracé de la courbe semble cohérent (*écran* 1).
b) L'ensemble de définition de g est : $[2\,;+\infty[$.
Seul l'arc de courbe correspondant à $[2\,;+\infty[$ devrait donc être représenté (voir *écran* 1 de la fiche élève).
c) $\sqrt{x-2}\ |\ x<2$ donne : $i\sqrt{2-x}$.



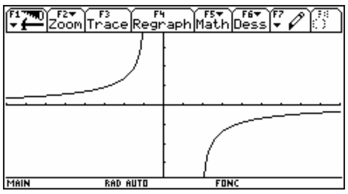
écran 1

Pour la machine, quand $x \leq -1$,
$\sqrt{x-2}\times\sqrt{x+1} = i\sqrt{2-x}\ \times i\sqrt{-x-1}\ = -\sqrt{2-x}\ \sqrt{-x-1}\ = -\sqrt{(x-2)\,(x+1)}$.
On comprend ainsi la représentation de g sur $]-\infty\,;-1]$.

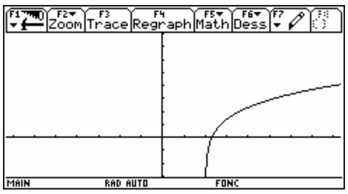
2) D'après **1) c)**, pour la machine, quand $x<-1$, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} = \dfrac{i\sqrt{-x-1}}{i\sqrt{2-x}} = \sqrt{\dfrac{-x-1}{2-x}} = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$.
On constate alors la même représentation pour m et n.

3) a) Les fonctions h et l ont pour ensembles de définition respectivement :
$]2\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;-1[\ \cup\ ]2\,;+\infty[$.
La calculatrice donne pourtant la même représentation pour les fonctions h et l (*écran* 2).

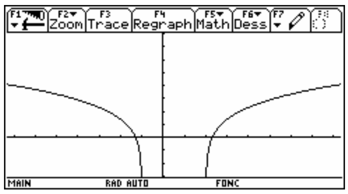
b) Les fonctions k et p ont respectivement les mêmes ensembles de définition que h et l.
Pourtant les représentations graphiques de k et p semblent ici cohérentes avec les ensembles de définition (*écrans* 3 et 4).



écran 2

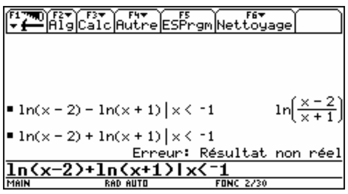


écran 3



écran 4

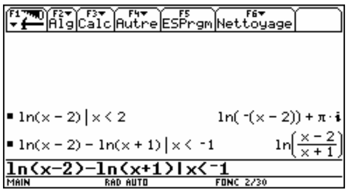
c) Pour la machine, h et l semblent confondues sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$ (rappel : h n'est pas définie sur $]-\infty\,;-1[$).
En revanche, le résultat donné par la calculatrice pour k est cohérent avec son ensemble de définition (*écran* 5).



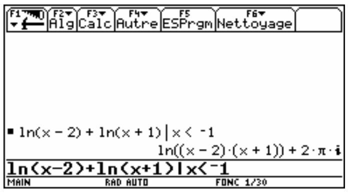
écran 5

d) Pour la calculatrice (*écran* 6) , quand $x < 2$,
$\ln(x-2) = \ln(-(x-2)\times(-1) = \ln(-(x-2)\times e^{i\pi}) = \ln(-(x-2)) + \ln e^{i\pi} = \ln(-(x-2)) + i\pi$.
En utilisant cette écriture de $\ln(x-2)$ et celle de $\ln(x+1)$ pour $x < -1$, on obtient les résultats affichés par la machine dans les *écrans* 6 et 7.

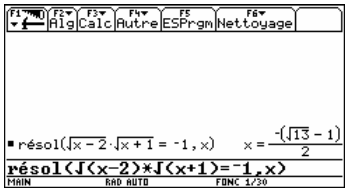
e) On comprend ainsi que la calculatrice affiche les mêmes courbes pour h et l. En revanche, le résultat non réel affiché pour $\ln(x-2) + \ln(x+1)$ empêche le tracé de k sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$.



écran 6



écran 7



écran 8

4. Compléments

On peut compléter cette étude par la résolution d'équations comme : $\sqrt{x-2}\times\sqrt{x+1} = -1$.
La machine donne une solution … (*écran* 8).

F1f – CURIEUSES REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

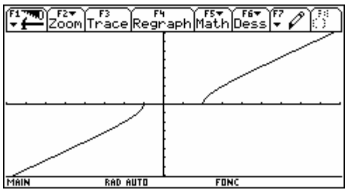
Placer la machine en **MODE FONCTION** et **Format Complexe REEL**.

1) a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{(x-2)(x+1)}$?
Faire tracer sur la machine la représentation graphique de la fonction.
La représentation graphique est-elle cohérente avec la réponse précédente ?

b) Quel est l'ensemble de définition de la fonction

$$g : x \mapsto \sqrt{x-2} \times \sqrt{x+1} \text{ ?}$$

Voici la représentation graphique de la fonction donnée par la machine (*écran* 1).
Est-ce surprenant ? Pourquoi ?

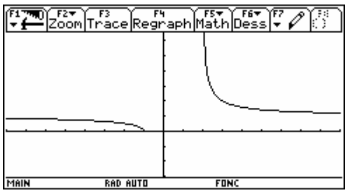


écran 1

c) Placer la machine en **MODE Format Complexe RECTANGULAIRE**.
Écrire $\sqrt{x-2}$ | $x < 2$. Que retourne la machine ?
Exprimer alors, sur le papier, comme le ferait la machine, le produit $\sqrt{x-2} \times \sqrt{x+1}$ pour $x < -1$.
Vérifier avec la calculatrice.
Expliquer alors la représentation de g fournie par la calculatrice.
Replacer la machine en **MODE Format Complexe REEL**.

2) Soit les fonctions $m : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$ et $n : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$.

La fonction m est définie sur $]-\infty\,;-1] \cup]2\,;+\infty[$.
Voici la représentation graphique de la fonction m donnée par la machine (*écran* 2).
La fonction n est définie sur $]2\,;+\infty[$.
Sachant que pour la machine, la fonction n est aussi définie sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$, deviner, en utilisant la question **1)**, les arcs de courbe tracés pour la fonction n par la calculatrice.
Vérifier avec **GRAPH** .



écran 2

3) a) Faire tracer par la machine les représentations des fonctions

$$h : x \mapsto \ln(x-2) - \ln(x+1) \quad \text{et} \quad l : x \mapsto \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right).$$

b) Faire tracer de même les représentations des fonctions

$$k : x \mapsto \ln(x-2) + \ln(x+1) \quad \text{et} \quad p : x \mapsto \ln((x-2).(x+1)) .$$

c) La machine étant toujours en **MODE Format Complexe REEL**, écrire (**HOME**) :
$\ln(x-2) - \ln(x+1)$ | $x < -1$, puis $\ln(x-2) + \ln(x+1)$ | $x < -1$.
Que remarque-t-on ?

d) Se placer en **MODE Format Complexe RECTANGULAIRE** et demander successivement :

$\ln(x-2)$ | $x < 2$
$\ln(x-2) - \ln(x+1)$ | $x < -1$
$\ln(x-2) + \ln(x+1)$ | $x < -1$.

Expliquer les résultats donnés par la calculatrice.

e) En déduire les représentations graphiques de **3) a)** et **3) b)** et expliquer, en particulier, l'obtention du même graphique pour h et l dans la question **a)**.