

Nombre _____ Fecha _____

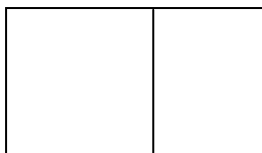
Actividad NUMB3RS: Tenga su torta y cómlala también

En "Una hora" el FBI está persiguiendo a unos secuestradores que demandan un rescate de 3.2 millones. El FBI piensa que este número tiene un significado especial para el secuestrador, pero Charlie no está de acuerdo. Charlie compara la repartición del dinero entre los secuestradores con la repartición de una torta entre un grupo. Charlie explica que si dos personas se ponen de acuerdo en dividir una torta, "la estrategia lógica es partirla a la mitad. Pero si a una persona le gusta más la cubierta que a la otra, si otra prefiere la torta de vainilla y otra prefiere torta de chocolate con cubierta de vainilla, puede ser que picar los pedazos en forma desigual sea la solución para una distribución más justa". Charlie usa el algoritmo de cortar el pastel para llegar a la conclusión de que el propósito del secuestrador principal es obtener \$1.65 millones, una cantidad que tiene un significado personal para una de las personas en cuestión. En esta actividad van a explorar maneras justas en que dos personas comparten una torta y después ampliarán la exploración a tres personas.

Considera el caso de dos personas que se ponen de acuerdo en compartir una torta justamente. Una división justa significa que ambas personas consideren que el pedazo que recibieron tiene un valor al menos igual a la mitad del valor de la torta. Como Charlie dice en el episodio, las personas pueden tener opiniones diferentes sobre el valor de un pedazo. Por ejemplo, alguien al que le gusta la cubierta puede darle más valor a un pedazo de torta con más cubierta, aunque este tenga menos volumen.

Una persona hace un corte para dividir la torta en lo que él o ella considera que son dos partes iguales; la otra persona escoge su pedazo primero. Esto se llama el método "yo parto, tú escoges". La primera persona tiende a cortar los pedazos lo más equitativamente posible porque él o ella pudieran quedarse al final el con pedazo menos deseable.

Charlie y Don están usando el método "yo corto, tú escoges" para dividir una torta. Charlie hará un corte vertical. Cada corte creará dos pedazos, uno a la derecha y otro a la izquierda. Charlie considerará que cada parte tiene un por ciento del valor del entero. Por ejemplo, para el corte hecho a continuación, l puede pensar que el lado izquierdo tiene un valor igual al 40% de la torta y que el lado derecho vale un 60%. (Recuerda que Charlie está juzgando estos valores basado en sus preferencias personales, no necesariamente en las dimensiones).



1. a. ¿Dónde ha puesto Charlie el corte si él considera que el pedazo izquierdo vale el 0%?
- b. ¿Dónde ha puesto Charlie el corte si él considera que el pedazo izquierdo vale el 100%?
- c. Explica por qué tiene que existir un corte en que Charlie divida la torta en dos partes de igual valor.

La respuesta a la pregunta 1c tiene que ver con el Teorema del Valor Intermedio, un concepto que se estudia en cálculo. El teorema enuncia que para una función continua f en el intervalo $[a, b]$, si existe un valor d entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces hay un valor de c en (a, b) tal que $f(c) = d$. Por ejemplo, si alguien medía 5 pies el año pasado y ahora mide 5 pies y 2 pulgadas de alto, en cierto punto esa persona midió 5 pies y 1 pulgada de alto. Con el mismo razonamiento, se puede decir que siempre hay un lugar en que una persona puede hacer el corte de una torta y formar dos pedazos del mismo valor. El truco, por supuesto, es encontrar ese lugar. Al Teorema del Valor Intermedio se le llama un teorema de existencia, porque garantiza que un valor existe, pero no aporta un método para hallar ese valor.

En el caso de dos personas, la primera persona determina dónde cortar la torta. Charlie corta la torta en lo que él considera dos partes de igual valor. Don escogerá cualquier pedazo y Charlie recibirá el otro.

2. Explica por qué los hermanos reciben un pedazo que ambos consideran tiene al menos el 50% del valor de la torta.

¿Cómo cambia el caso si son tres las personas que están tratando de repartir la torta equitativamente? Una división equitativa en este caso significa que cada persona crea que está recibiendo un pedazo que tiene al menos el valor de un tercio de la torta.

3. Decide si cada método que aparece a continuación es justo:
 - a. Amita corta la torta en lo que ella considera que son tres tercios iguales. Charlie escoge el primer pedazo. Don escoge el segundo pedazo y Amita recibe el pedazo restante.
 - b. Charlie corta la torta en dos mitades que él considera iguales. Amita escoge un pedazo y Charlie recibe el otro. Amita y Charlie cortan cada uno su pedazo en lo que ellos consideran que son tercios iguales. Don escoge un pedazo de los de Charlie y uno de los de Amita. Charlie y Amita reciben lo que queda.
 - c. Amita señala un pedazo que ella considera que tiene el valor de un tercio de la torta. Charlie y Don tienen la oportunidad de inspeccionar el pedazo. Si cualquiera de ellos piensa que el pedazo representa más de un tercio del valor total, puede indicar cómo cortar la pieza de tal forma que el valor, en su opinión, sea igual a un tercio del valor total. La porción es dada a la persona cuyo corte es aceptado por las otras dos. Después de que el primer pedazo ha sido tomado, las dos personas restantes usan un procedimiento similar en lo que queda de la torta.
4. Formula tu método particular para repartir una torta equitativamente entre tres personas.

El objeto de esta actividad es dar a los estudiantes un vistazo breve y sencillo de un tema matemático muy extenso. TI y NCTM lo invitan a usted y a sus estudiantes a aprender más sobre este tema con las extensiones que se ofrecen abajo y con su propia investigación independiente.

Extensiones

Para el estudiante

- Considera una vez más el caso de las tres personas y la siguiente pregunta de cómo dividir equitativamente: ¿Se puede cortar la torta en tres pedazos y asignarlos de tal forma que cada una de las tres personas considere que está recibiendo el pedazo más deseable? La respuesta sorprendente es, sí. La prueba da las siguientes dos posibilidades. Para cada caso, las tres personas ha dado, independientemente, una descripción de sus preferencias. Usando esos diagramas de preferencias, la torta se ha cortado estratégicamente en los pedazos 1, 2 y 3. Puede leer más detalles en la solución del diagrama de preferencias y sus aplicaciones en otras áreas como la repartición de tierras y dinero en "El corazón de las matemáticas", que aparece a continuación.

Caso 1: La Persona A valora los tres pedazos por igual. La Persona B valora los pedazos 1 y 2 como iguales y el pedazo 3 como el de menor valor. Si recordamos que las preferencias de la Persona C son conocidas, explica cómo todos pueden recibir lo que ellos consideran el mejor de los tres pedazos.

Caso 2: La Persona A valora los pedazos 1 y 2 igualmente y el pedazo 3 como el de menor valor. La Persona B valora los pedazos 2 y 3 igualmente y el pedazo 1 como el de menor valor. Si recordamos que las preferencias de la Persona C son conocidas, explica cómo todos pueden recibir lo que ellos consideran el mejor de los tres pedazos.

Un problema potencial con "Yo corto, tú escoges" es que la persona que corta piense que la otra persona ha recibido más de lo que ella considera ser el 50% del valor total. Una forma de compensar esa posibilidad involucra un concepto llamado la Optimización de Parapeto.

Investiga esta idea yendo a los sitios Web siguientes:

<http://www.econlib.org/library/Enc/bios/Pareto.html>

<http://www-cdr.stanford.edu/NextLink/papers/pareto/pareto.html>

- Investiga la asignación de tierras en Alemania después de la Segunda Guerra Mundial. Encuentras algunos detalles en "Para todos los propósitos prácticos", que aparece a continuación.

Recursos adicionales

- Burger, Edward B, y Michael Starbird. *The Heart of Mathematics: An Invitation to Effective Thinking*. 2nd ed. Emeryville, CA: Key Curriculum Press, 2004.
- Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP). *For All Practical Purposes*. 6th ed. New York: W. H. Freeman & Company, 2003.