Nombre: ________________________________ Fecha: _______________

Actividad *NUMB3RS*: Sorpresa de cumpleaños

Cuando Charlie dicta su clase sobre hechos aleatorios, hace referencia al famoso "problema de los cumpleaños". Este problema suele tomar la forma de una apuesta entre los invitados a una fiesta en la que dos de ellos tienen el mismo cumpleaños. ¿Cuántas personas debe haber en la fiesta para que la apuesta sea pareja (igualmente probable que haya o que no haya correspondencia en las fechas)? Antes de proseguir, adivina este número.

La mayoría de las personas sobrestiman cuántos se necesitan. No es fácil hacer un cálculo directo: resulta mucho menos difícil calcular el *complemento* de la correspondencia. Es decir, buscar primero la probabilidad de que **no** haya correspondencia (que es el complemento de que sí la haya). Sea $P(\sim M)$ la probabilidad de no correspondencia. Como la suma de la probabilidad de correspondencia $P(M)$ y de no correspondencia $P(\sim M)$ es 1, $P(M) = 1 - P(\sim M)$.

Si hay una persona en la fiesta, obviamente no hay posibilidad de que dos correspondan. Pero si hay una segunda persona presente, no habrá correspondencia si la segunda nació en cualquiera de los 364 días diferentes del día en que nació la primera. La probabilidad de no correspondencia es $\frac{364}{365}$, y por tanto la probabilidad de correspondencia es $1 - \frac{364}{365} = \frac{1}{365}$. Si hay tres personas, la tercera no tendrá correspondencia si su cumpleaños no coincide con el de una de las otras dos. Así, hay 363 días "favorables". Para hallar, pues, la probabilidad de no correspondencia, multiplica la probabilidad anterior por $\frac{363}{365}$; la probabilidad de no correspondencia para tres personas es $\left(\frac{364}{365}\right)\left(\frac{363}{365}\right) \approx 0.99$ y la probabilidad de correspondencia es aproximadamente 0.01. Como estas fracciones son incómodas, los siguientes problemas emplean números más pequeños a fin de facilitar la comprensión del principio antes de volver al problema de los cumpleaños.

1. Supongamos que las placas de autos en cierto estado se generan al azar y que todas terminan en un dígito de 0 a 9. Completa la tabla siguiente para hallar la probabilidad de que ciertos números de autos tengan placas terminadas en el mismo dígito.

Número de autos	*P*(no correspondencia)	*P*(correspondencia)
1	1	1 – 1 = 0
2	0.9	1 – 0.9 = 0.1
3	(0.9)(0.8) = 0.72	1 – 0.72 = ?
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Bro. Patrick Carney, De Paul Catholic High School, Wayne, NJ

2. Según la tabla, ¿cuál es el número menor de autos (llamado el *tamaño de muestra*) necesario para que la probabilidad de correspondencia sea superior a 0.5?

3. En vez del día del cumpleaños, consideremos un problema más sencillo: el mes del cumpleaños. Supongamos que hay igual probabilidad de nacer en cualquiera de los meses (lo cual en realidad no es exactamente correcto por muchas razones, entre ellas el hecho de que unos meses tienen más días que otros). Aplicando el mismo razonamiento, ¿cuál es la muestra mínima de personas necesaria para que la probabilidad de que dos de ellas hayan nacido el mismo mes sea superior a 0.5?

4. ¿Cuál es el número mínimo de personas necesario para que la probabilidad de una correspondencia sea superior a 0.9?

El siguiente programa se puede emplear para simular estos tipos de problemas en tu calculadora graficadora.

```
PROGRAM: BIRTHDAY
:ClrHome
:Input "TOTAL POSSIBLE?",T
:1→A
:1→N
:Lbl 1
:ClrHome
:While N≠T
:A*(T+1-N)/T→A
:Disp "NUMBER",N,"PROB NO MATCH",A,"PROB MATCH",1-A
:N+1→N
:Pause
:Goto 1
:End
```

Cuando ejecutes este problema se te pedirá el número total de eventos posibles (p. ej., 365 para día del cumpleaños, 12 para mes del cumpleaños, 10 para dígitos de la placa, etc.). Cada vez que oprimes ENTER, el número en la muestra aumenta uno y aparece la probabilidad de no correspondencia así como la probabilidad de correspondencia. Este programa no solamente facilita contestar las cuatro preguntas siguientes, sino que demuestra cómo la probabilidad de correspondencia empieza siendo pequeña y luego aumenta rápidamente conforme crece el tamaño de la muestra.

5. Aplica el mismo razonamiento para determinar el número mínimo de billetes de dólar aleatorios para que haya por lo menos una probabilidad de 0.5 de que correspondan los dos dígitos finales del número de serie de al menos dos billetes (nota que hay 100 posibles – de 00 a 99).

6. En el problema anterior, determina el número mínimo de billetes de dólar aleatorios para que haya por lo menos una probabilidad de 0.9 de que correspondan los dos dígitos finales del número de serie de al menos dos billetes.

7. Ahora regresa al problema original que empleó Charlie en el salón de clase. ¿Cuál es el número mínimo de personas que debe haber en el salón para que la probabilidad de que dos tengan el mismo cumpleaños sea por lo menos de 0.5?

8. ¿Cuál es el número mínimo de personas necesarias en el salón para que la probabilidad de que dos tengan el mismo cumpleaños sea por lo menos de 0.9?

Bro. Patrick Carney, De Paul Catholic High School, Wayne, NJ

El objeto de esta actividad es dar a los estudiantes un vistazo breve y sencillo de un tema matemático muy extenso. TI y NCTM lo invitan a usted y a sus estudiantes a aprender más sobre este tema con las extensiones que se ofrecen abajo y con su propia investigación independiente.

Extensiones

Introducción

Como bien lo señala Charlie en su clase, la gente se equivoca mucho y toma malas decisiones porque no entiende las matemáticas de las probabilidades. Además de enseñar una técnica, los problemas como este deben enseñarle al estudiante a ser cauteloso cuando se le presentan proposiciones que parecen “obvias”. Por ejemplo, como 42 personas han ocupado el cargo de presidente de los Estados Unidos, ¿debiera alguien sorprenderse si dos tienen el mismo cumpleaños? Aunque hay menos de 42 presidentes que han fallecido, ¿sería probable que dos fallecieran en la misma fecha? En general, los hechos que se señalan como “coincidencias” deben comprobarse matemáticamente. Para más información, véase el sitio Web **http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/coincidence.shtml**

Temas relacionados

- Hay muchos temas más (particularmente en los ámbitos de la combinatoria y la probabilidad) en los cuales resulta más fácil calcular el complemento y luego restar para hallar la respuesta deseada. Por ejemplo, supongamos que alguien saca dos cartas de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar pares (las dos del mismo rango, p. ej. Q, siete, etc.)? Computando directamente, hay 13 rangos y el número de parejas de cada uno es ${}_4C_2 = 6$, de modo que habría 13(6) = 78 pares favorables y ${}_{52}C_2 = 1{,}326$ pares. Así, la probabilidad es $\frac{78}{1{,}326} \approx 0.0588$. Al emplear el complemento, solamente hay que considerar que la segunda carta NO es una correspondencia, es decir 48 de las 51 cartas restantes. Así, la probabilidad es $1 - \frac{48}{51} \approx 0.0588$. Este, por supuesto, es un caso sencillo. Al aumentar el número de cartas, también aumenta la complejidad de los cálculos. Intenta aplicar esta técnica a cualquier juego de naipes que conozcas.
- El problema de los cumpleaños se puede extender. Por ejemplo, se puede considerar la probabilidad de tener *n* correspondencias en vez de solo 2. Para un tratado matemático más extenso (y avanzado) de este problema, ver **http://mathworld.wolfram.com/BirthdayProblem.html**.

Recursos adicionales

- Hay una ilustración interesante con frijoles en cajas, la cual ayuda a visualizar el concepto de este problema, en el libro Mathematics de Life Science Library por David Bergamini (Time-Life Books, New York, 1972, págs. 142–3).
- Para un applet que simula el problema de los cumpleaños e incluye una gráfica acumulativa de ensayos de diferente tamaños, visita **http://www.mste.uiuc.edu/reese/birthday**.
- Para una lección completa que comienza con la historia del problema de los cumpleaños visita **http://www.teacherlink.org/content/math/interactive/probability/lessonplans/birthday/home.html**.

Bro. Patrick Carney, De Paul Catholic High School, Wayne, NJ