Formler och mönster

Figurerna visar ett mönster med ett antal kvadrater.

a) Hur många kvadrater är det i figur nr 10?

b) Teckna en formel som visar antalet kvadrater a_n i figur nr n.

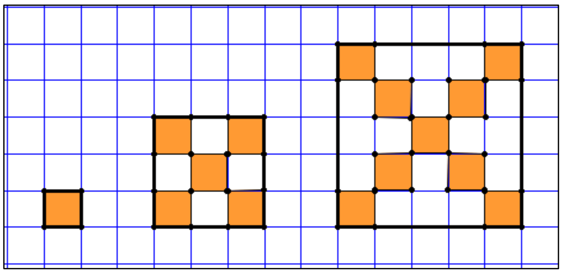
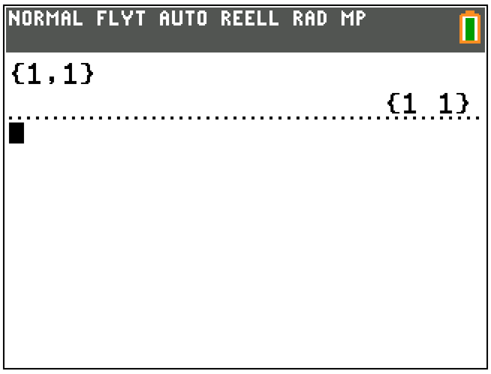


Fig 1 Fig 2 Fig 3

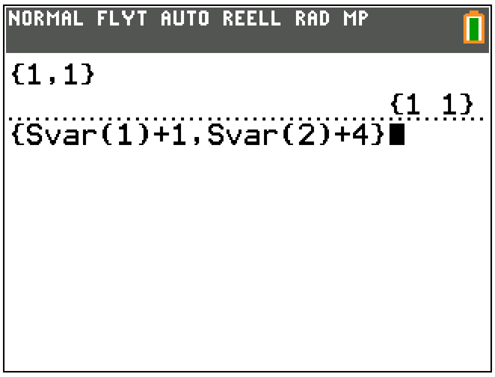
Vi kan ju naturligtvis räkna oss fram figur för figur eller också kan vi tänka så här: I figurerna så ökas antalet med 4 varje gång. Från figur 2 till figur 10 är det 9 steg. Alltså blir det $1 + 9 \cdot 4 = 37$.

Ett annat sätt är att börja med att skriva så här:



Talen står för figurnummer och antalet kvadrater. Det är ju en kvadrat i figur 1.

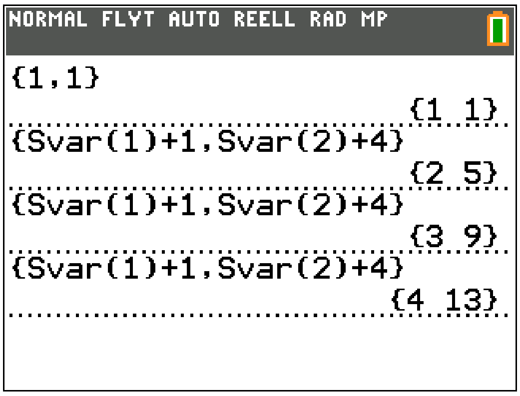
Fortsätt nu att skriva så här:



Svar får du genom att trycka på [2nd][ANS]. Svar(1) betyder det först beräknade värdet i raden ovanför (som är 1) och Svar(1) + 1 betyder att vi ska lägga till 1 nästa gång vi gör en beräkning.

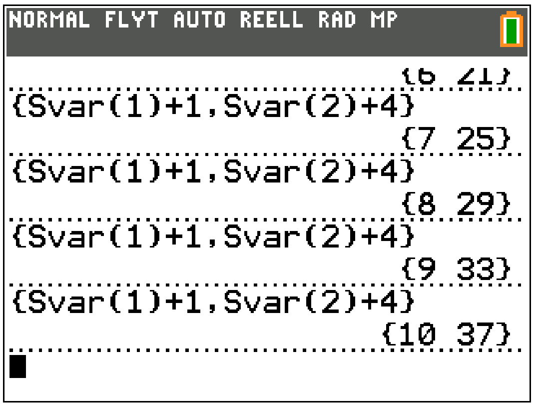
På motsvarande sätt är det för Svar(2) i raden ovanför (som är 1): vi ska lägga till 4.

Tryck nu upprepade gånger på [ENTER].



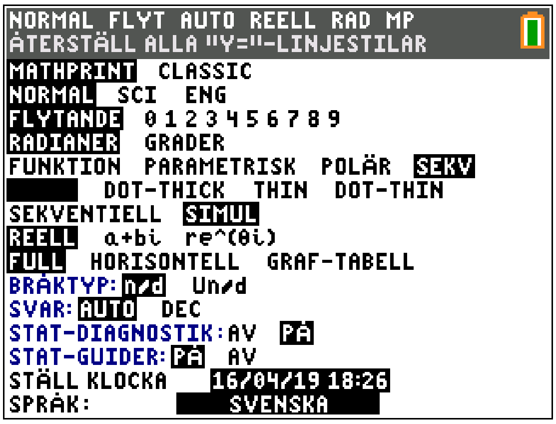
Nu får vi antalet kvadrater i figur 2, figur 3 osv.

Om vi fortsätter att trycka på [ENTER] så ser vi att det i figur 10 blir 37 st. Varje rad i räknar-fönstret ger figurnummer och antalet kvad-rater.



Det här är ju lite omständligt. Nu finns det ett annat sätt att göra beräkningarna. Vi ska skriva in ett utryck för den följd av tal vi får för antalet kvadrater. Det kallas för en talföljd och har beteckningen SEKV (står för sekvens) på räknaren.

Gå då först till räknarens allmänna inställ-ningar genom att trycka på [MODE].



Se till att du markerar SEKV på 5:e raden.

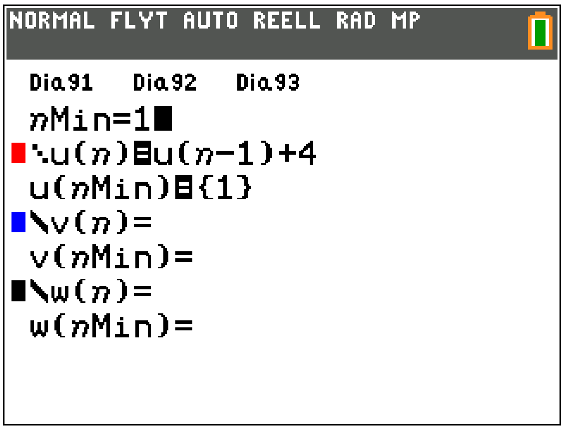
Tryck nu på [Y=]. Då kommer inmatningsmenyn för talföljder.

Första raden säger att vi ska börja räkna från *n*=1.

Andra raden är formeln. Det är en formel i *rekursiv* form som betyder att varje nytt värde,(u(*n*), är det föregående, u(*n*-1), + 4.

Tredje raden säger att det minsta värdet då *n*= 1 är 1.

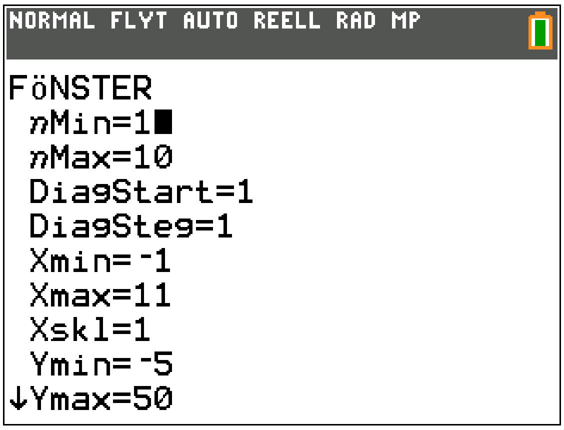
Vi har också ställt in att vi ska plotta i röd färg och prickat.



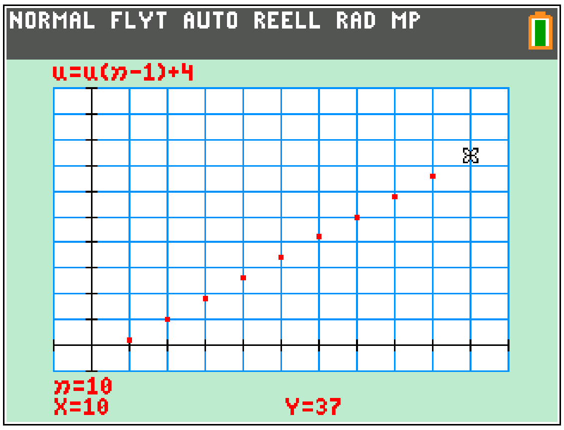
När du skriver in detta uttryck så behöver du komma åt beteckningen **u**. Tryck på [ALPHA] [7]. Du ser att det står ett litet u ovanför tangenten 7.

För att skriva in ***n*** så trycker du på [X,T,Θ,*n*].

Nu kan vi snart plotta. Först bör vi dock ställa in ett bra fönster.

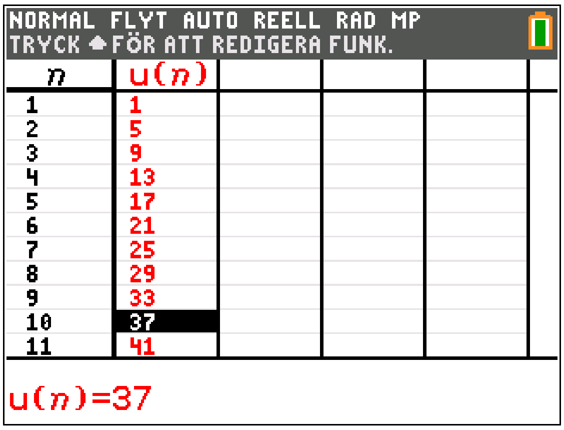


Nu kan vi plotta.



Vi kan spåra i plottningen genom att trycka på [TRACE].

Man kan också få en tabell med de värdena för de plottade punkterna. Tryck då på [2nd][TABLE].



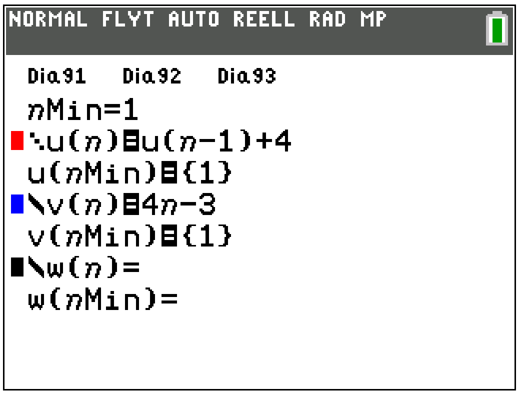
Hur ska man nu hitta en formel i *sluten* form som direkt ger antalet kvadrater i figur nr *n*? Om vi räknar från figur 1 till figur 10 är det 9 steg. Alltså blir antalet kvadrater i figur 10: $1 + 9 \cdot 4 = 37$.

Om vi nu räknar från figur 1 till figur n blir det $1+(n-1)\cdot 4$. Vår formel blir då alltså

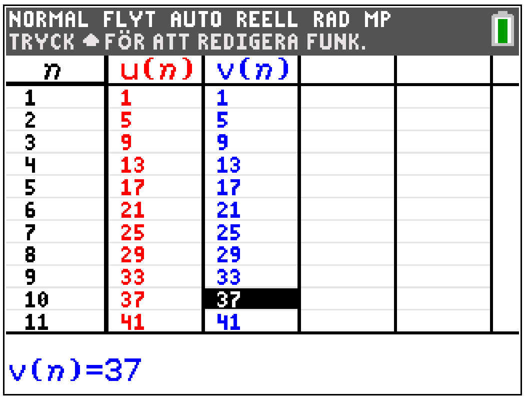
$$u(n)=1+(n-1)\cdot 4$$

Uttrycket kan förenklas till: $u(n)=4n-3$.

Vi matar nu in denna formel under $v(n)$.



Resultatet syns i tabellen. Vi får samma värden.



n	u(n)	v(n)
1	1	1
2	5	5
3	9	9
4	13	13
5	17	17
6	21	21
7	25	25
8	29	29
9	33	33
10	37	37
11	41	41

Nu till ett annat problem:

Titta på triangelmönstren ovan, där vi visar de första fyra stegen. Antag att vi vill veta hur många prickar det är i figur nr 10?

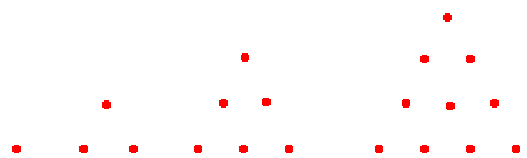
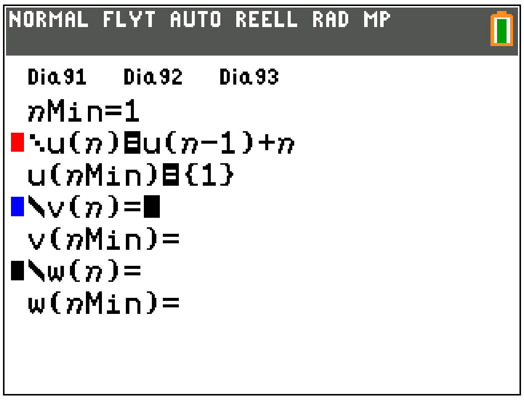


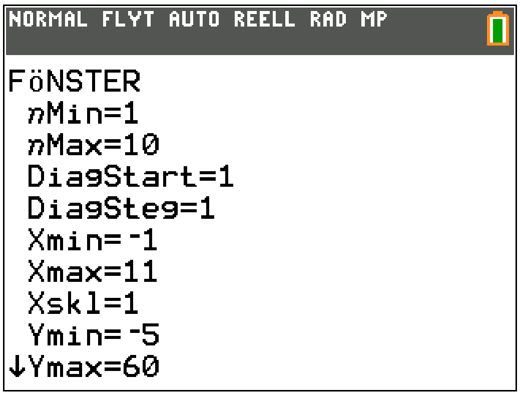
fig 1 fig 2 fig 3 fig 4

Om vi tittar på figur nr 3 t.ex. så ser vi att antalet prickar där är antalet prickar i föregående figur, dvs. figur nr 2, plus det antal prickar som figurnumret anger (3 st). Samma sak gäller om vi går till figur nummer 4. Antalet prickar där är antalet prickar i figur nr 3 plus 4 st till eftersom det är figur nr 4.

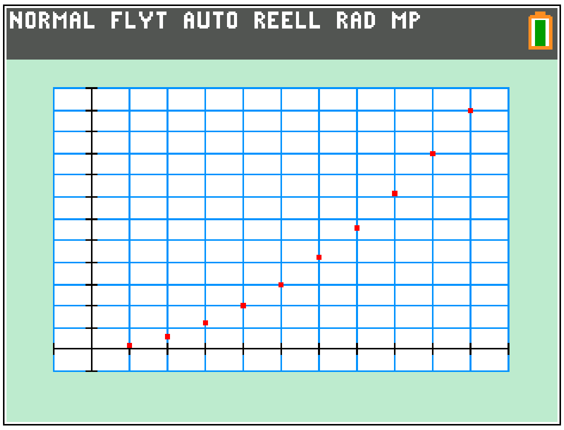
Vi har alltså funnit ett mönster och kan skriva in en rekursiv formel på samma sätt som i förra problemet. Se inmatningsmenyn nedan.

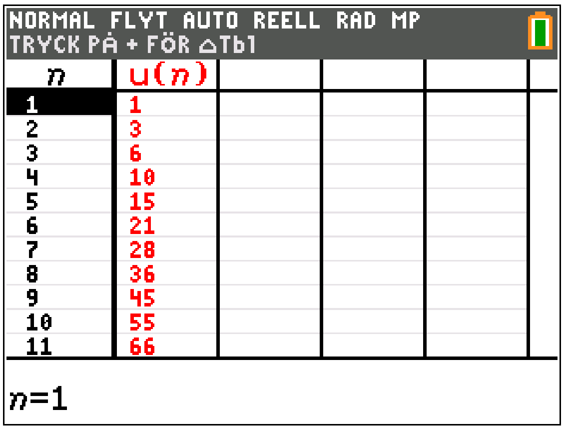


En bra fönsterinställning har du här. Man får ofta pröva sig fram här.



Vi tar fram en graf och en tabell.




NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP
TRYCK PÅ + FÖR ΔTbl

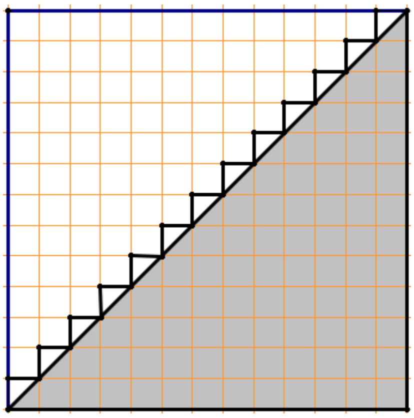
n	u(n)
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
10	55
11	66

n=1

Vi ser att det blir 55 prickar i figur 10.

Om vi tittar på tringlarna i figuren så ser vi att de byggs upp av talen 1 + 2 + 3 + 4 + ...

Hur ska vi då beräkna summan för sådan tal-serie? Betrakta trappan i figuren som är byggd av kvadratiska block. Den stora kvadraten är här gjord som en 13×13 kvadrat.
Summan av alla block i trappan är halva kvadraten (det grå fältet) plus alla de svarta trappstegen, som är halva kvadrater. De har ju arean 1/2.



Om figuren nu är en $n \times n$ kvadrat så består hela trappan av

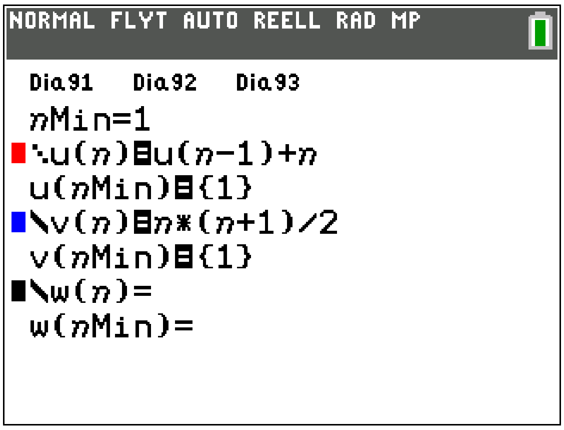
$\frac{n^2}{2}$ block (det grå fältet)

$n \cdot \frac{1}{2}$ block (trappstegen)

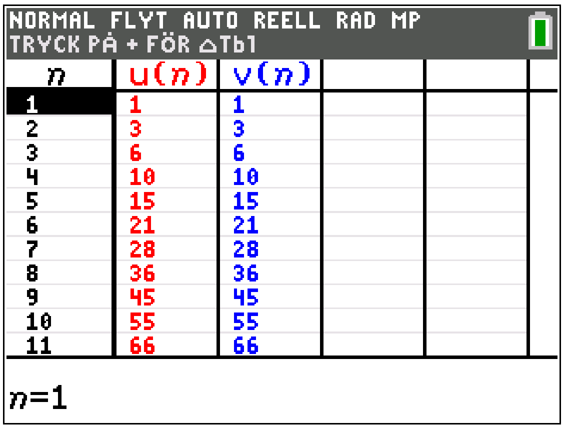
Totala antalet block blir då

$$\frac{n^2}{2} + n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Med detta geometriska bevis har vi fått en annan formel för antalet prickar. Vi kan skriva in den i editorn för talföljder.



Vi får samma resultat.


NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP
TRYCK PÅ + FÖR ΔTbl

n	u(n)	v(n)
1	1	1
2	3	3
3	6	6
4	10	10
5	15	15
6	21	21
7	28	28
8	36	36
9	45	45
10	55	55
11	66	66

n=1

Den senare formeln är naturligtvis elegantare eftersom den direkt ger antalet prickar i tri-angelmönstret för vilken figur som helst.

Till sist ett problem som vi inte ger någon lösning på:

Hur många linjer kan man dra mellan de punkter som utgör hörn i månghörningar? Bilden nedan visar en triangel, en fyrhörning och en femhörning. Här kan vi räkna till 3, 6 resp. 10 linjer.

Ta alltså fram en formel som anger antalet linjer i n-hörning.