Auteur : Jacques Salles

Conjecturer, prouver en multi-représentations TI-*n*spire CAS	**Surfer sur une courbe** *Étude du signe d'une expression algébrique*

Fichier associé : surfersurunecourbe-prof.tns

Documents de formation : Surfer sur une courbe.pdf, surfersurunecourbe_docformation.tns

Au travers de l'étude de la position d'une courbe par rapport à ses tangentes, les élèves sont placés en situation d'émettre des conjectures puis de déterminer le signe d'une expression algébrique par factorisation, avec succès dans un premier temps. Ils seront amenés ensuite, en étudiant un exemple où cette méthode est mise en échec, à mettre en place une autre stratégie.
Les exemples proposés pourraient conduire à des calculs répétitifs et fastidieux ; afin d'éviter cet écueil, le choix a été fait de faire réaliser « papier crayon » l'intégralité des calculs pour la première fonction afin d'aider les élèves à s'approprier la démarche, puis de les confier à un outil de calcul formel pour les fonctions suivantes.

Conduite de l'activité

Plusieurs fonctions sont proposées, avec le souci de graduer les marches dans la façon d'appréhender la situation de manière autonome et d'émettre une conjecture correcte et complète.

• **Trinôme du second degré** ($x \mapsto x^2 + 2x - 3$) : la conjecture est aisée, les calculs « papier crayon » ne nécessitent pas d'expertise particulière sans pour autant être triviaux du fait de la présence d'un paramètre (l'abscisse a du point de tangence) ; la factorisation repose sur une identité remarquable.
Le professeur doit cependant être particulièrement attentif à aider les élèves en situation de blocage du fait de la présence du paramètre lors de la recherche de l'équation de la tangente.

• **Racine carrée et inverse** : les conjectures sont toujours aisées, mais leur formulation est plus délicate (par exemple, quel que soit le réel a non nul, la représentation graphique de la fonction inverse est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse a sur $\mathbb{R}^{*+}$, au-dessous sur $\mathbb{R}^{*-}$) ; les résultats des factorisations données par le calcul formel sont facilement interprétables.

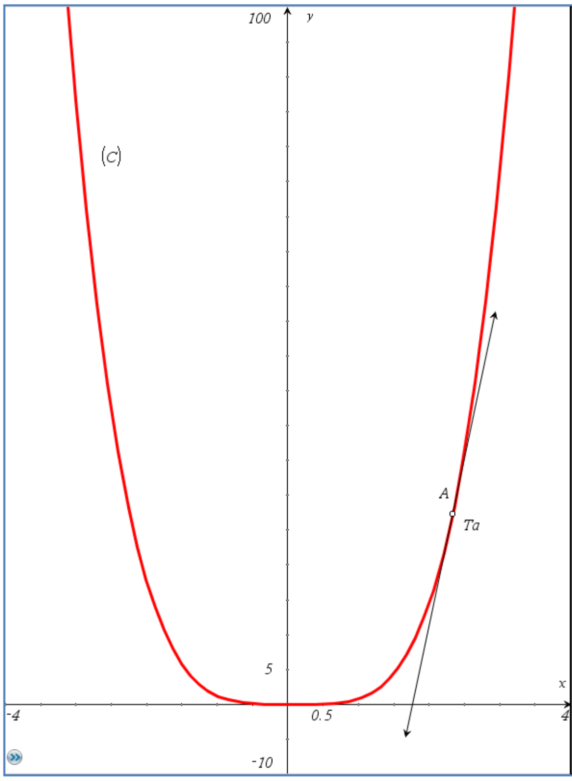
• **Cube** : la conjecture est complexifiée du fait de la présence d'un point d'intersection entre la tangente et la courbe autre que le point de tangence, ce second point pouvant être à l'extérieur de la fenêtre d'affichage ou ne pas apparaître du fait d'un tracé partiel de la tangente. Localement, la situation est identique à celle de la fonction inverse, mais la présence d'un second point d'intersection ajoute à la difficulté du fait de son abscisse b variable, et dépendante de l'abscisse a du point de tangence ($b = {}^{-}2a$). La difficulté prévisible à formuler la conjecture : « la courbe est située au-dessus de sa tangente sur l'intervalle $[b\,;+\infty[$ » fournira l'occasion d'un débat constructif.

• **Fonction polynomiale du quatrième degré** (avec un choix réfléchi des coefficients) : une conjecture graphique semble tout aussi évidente, mais se trouve mise en défaut par le résultat de la factorisation donnée par le calcul formel. Ici, l'objectif premier est d'amener les élèves à interpréter les différentes réponses du logiciel de calcul formel (en mode approché ou exact, et dans ce dernier mode, avec factorisation sans radicaux ou complète) de façon à les mettre en perspective avec certaines propriétés du graphique.

$$\text{factor}(\mathbf{f}(x)-\mathbf{ta}(x),x) = (x-0.109282)\cdot(x-0.06)\cdot(x-0.059996)\cdot(x+0.029282)$$

$$\text{factor}(\mathbf{f}(x)-\mathbf{ta}(x)) = \frac{(50\cdot x-3)^2\cdot(625\cdot x^2-50\cdot x-2)}{1562500}$$

$$\text{factor}(\mathbf{f}(x)-\mathbf{ta}(x),x) = \frac{(25\cdot x+\sqrt{3}-1)\cdot(25\cdot x-\sqrt{3}-1)\cdot(50\cdot x-3)^2}{1562500}$$



Question 4

a) Choix de la fonction f

Define $f(x)=x^4-0.2\cdot x^3+0.01\cdot x^2$

b) Choix de a

$a:=0.06$

c) Calcul de l'expression ta(x)

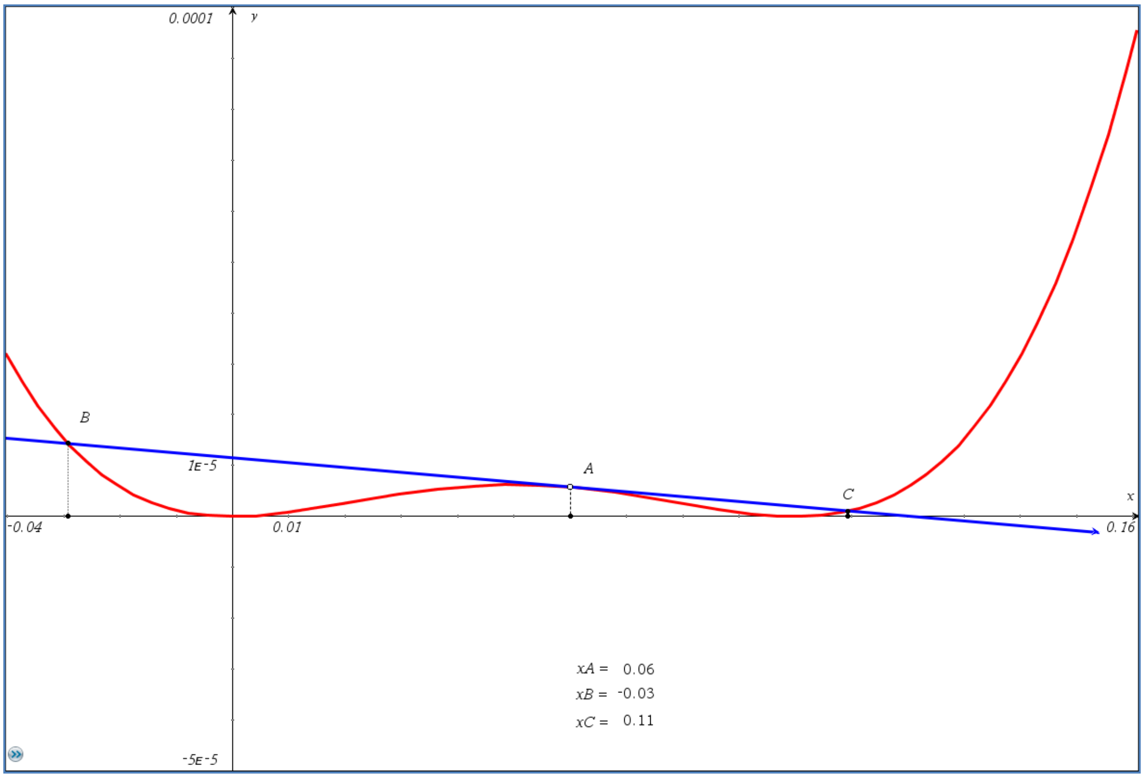
Define $ta(x)=\left(\frac{d}{dx}(f(x))|x=a\right)\cdot(x-a)+f(a)$

Equation de la tangente T**a** à la représentation graphique (C) de f au point A d'abscisse **a** : $y=\frac{9}{781250}-\frac{3\cdot x}{31250}$

d) Position de la courbe (C) par rapport à la tangente T**a**

$f(x)-ta(x)=x^4-\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{100}+\frac{3\cdot x}{31250}-\frac{9}{781250}$

$\text{factor}(f(x)-ta(x),x)=\frac{(25\cdot x+\sqrt{3}-1)\cdot(25\cdot x-\sqrt{3}-1)\cdot(50\cdot x-3)^2}{1562500}$



Le choix de cet exemple de fonction permet de rappeler de plus la nécessité de conserver une réserve dans l'interprétation d'une lecture graphique.

• **Exponentielle** : la conjecture est aisée, mais la validation par le calcul formel est mise en échec ; l'étude du signe de la différence $f(x)-t_a(x)$ n'est pas possible par l'algèbre (via une factorisation) ; une autre méthode doit être trouvée. La démarche d'étude du signe d'une expression par lecture d'un tableau de variation devient ici pertinente ; l'occasion est ainsi fournie de présenter cette méthode, mais elle peut aussi faire l'objet d'un réinvestissement.

Observation en classe

• **Trinôme du second degré** ($x \mapsto x^2 + 2x - 3$) : plusieurs élèves, qui connaissent la formule leur permettant de trouver l'équation de la tangente, se heurtent au statut du paramètre : que faire de $f(a)$, de $f'(a)$? D'autres, pour dépasser cette difficulté, affectent une valeur particulière à a, tout en étant conscients que ce choix particulier ne donne pas le statut de preuve au calcul effectué ; quelques-uns parmi ces derniers, ayant donc choisi de fixer numériquement a, parviennent à tirer parti de cette étape intermédiaire et mènent à bien la généralisation.

• **Racine carrée et inverse** : des confusions entre les statuts de paramètre (a) et de variable (x) apparaissent lors de la formulation de la conjecture (dans la phrase courante « *la courbe de la fonction inverse est au-dessus de sa tangente sur* $\mathbb{R}^{*+}$, *au-dessous sur* $\mathbb{R}^{*-}$ », l'élève sous-entend-il pour $\boldsymbol{x}$ appartenant à $\mathbb{R}^{*+}$, ou bien pour $\boldsymbol{a}$ appartenant à $\mathbb{R}^{*+}$?)

• **Cube** : les élèves observent la position relative d'une courbe et de l'une de ses tangentes d'un point de vue local (« *la courbe de la fonction cube est au-dessus de sa tangente sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *, au-dessous sur* $\mathbb{R}^{*-}$ » signifie pour l'élève : la courbe de la fonction cube est au-dessus de sa tangente si l'abscisse a du point de tangence est strictement positive, au-dessous si cette abscisse est strictement négative ; il ne prend pas en compte le point de vue global, qui l'amènerait à étudier, pour un réel a quelconque, la position relative de la courbe et de la tangente sur $\mathbb{R}$ et non pas seulement dans un voisinage de a). Le cas $a = 0$ interpelle car l'invariance locale de la position est mise en défaut : il devient nécessaire de prendre aussi en compte la variable « x » dans la formulation de la conjecture.

• **Fonction polynomiale du quatrième degré** : les nombreuses difficultés rencontrées par les élèves attestent de la pertinence à mettre en place un réel apprentissage de ce lien particulier entre le calcul formel et une lecture graphique où les coefficients d'une factorisation sont interprétés en abscisses de points d'intersection.

• **Exponentielle** : certains élèves ont facilement proposé la piste d'un raisonnement par l'analyse rencontré précédemment, permettant un réinvestissement de cette méthode pour l'ensemble de la classe. La réalisation s'effectue sans la moindre difficulté technique.

Note **:** *Un exemple de scénario est proposé dans* [*Aldon & al., Mathématiques dynamiques Terminale S Hachette Education* 2011] *page* 55 *; ce scénario a été mis en œuvre en novembre* 2010 *dans une classe de terminale S* (35 *élèves, tous équipés de la calculatrice TI-nspire CAS*) *et a fait l'objet d'une observation avec enregistrement sonore et visuel.*