Conjecturer, prouver en multi-représentations

TI-*n*spire CAS

Surfer sur une courbe

Étude du signe d'une expression algébrique

Fichier associé : surfersurunecourbe-eleve.tns

On s'intéresse ici à la position d'une courbe par rapport à ses tangentes. A travers cette étude, le but est d'explorer différentes voies pour émettre des conjectures, tester leur robustesse et le cas échéant les démontrer. On réfléchira d'autre part aux méthodes d'étude du signe d'une expression algébrique.

$\mathscr{C}$ désigne la représentation graphique d'une fonction f choisie parmi des fonctions de référence telles que carré, cube, inverse , racine carrée , polynôme , homographique, rationnelle, exponentielle et $\mathscr{T}_a$ la tangente à la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f au point A d'abscisse a.

Ouvrir le fichier **surfersurunecourbe-eleve.tns** à la **page 1.1** et le renommer **surfersurunecourbe-Nom InitialePrénom.tns**.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

a) Faire afficher la courbe $\mathscr{C}$, placer un point A sur $\mathscr{C}$ et tracer la tangente $\mathscr{T}_a$. Déplacer A, conjecturer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}_a$.

⇨ ... ...
... ...

b) Déterminer une équation $y = t_a(x)$ de la tangente $\mathscr{T}_a$.

⇨ ... ...
... ...
... ...

c) Démontrer la conjecture émise à la question **a)**.

⇨ ... ...
... ...
... ...

d) Passer à la page 1.2, renseigner $f(x)$ à la suite de la commande **Define f(x)=** dans l'Éditeur mathématique et vérifier les réponses aux questions précédentes.

2. Choisir l'une des deux fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ ou bien $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

a) Faire afficher la courbe $\mathscr{C}$ en page 2.1, placer un point A sur $\mathscr{C}$ et tracer la tangente $\mathscr{T}_a$. Déplacer A, conjecturer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}_a$.

⇨ ... ...
... ...
... ...

b) Passer à la page 2.2, renseigner $f(x)$ à la suite de la commande **Define f(x)=** dans l'Éditeur mathématique, interpréter les réponses du logiciel et conclure quant aux positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}_a$.

⇨ ... ...
... ...
... ...

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

a) Faire afficher la courbe $\mathscr{C}$ en page 3.1, placer un point A sur $\mathscr{C}$ et tracer la tangente T_a. Déplacer A, conjecturer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}_a$.

⇨ ... ...
... ...
... ...

b) Passer à la page 3.2, renseigner $f(x)$ à la suite de la commande **Define f(x)=** dans l'Éditeur mathématique, interpréter les réponses du logiciel et conclure quant aux positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}_a$.

⇨ ... ...
... ...
... ...

4. La courbe $\mathscr{C}$ affichée en page 4.1 représente une fonction polynômiale du quatrième degré.

a) Déplacer A, conjecturer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}_a$.

⇨ ... ...
... ...

Passer à la page 4.2 : la fonction f est définie dans l'éditeur mathématique. On se propose de contrôler la conjecture précédente pour une position particulière du point A.

b) Affecter la valeur 0,06 à l'abscisse a du point A. (On pourra insérer une boîte mathématique.)

Les réponses du logiciel sont-elles en accord avec la conjecture émise au **a)** ? Argumenter la réponse.

⇨ ... ...
... ...

c) En cas de réponse négative à la question **b)**, proposer une fenêtre graphique permettant une conjecture plus en cohérence avec le résultat du calcul formel.

⇨ ... ...

d) Conclure quant aux positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}_a$ et préciser leurs points d'intersection.

⇨ ... ...
... ...

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

a) Faire afficher la courbe $\mathscr{C}$ en page 5.1, placer un point A sur $\mathscr{C}$ et tracer la tangente $\mathscr{T}_a$. Déplacer A, conjecturer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}_a$.

© Texas Instruments 2011 / Photocopie autorisée

⇨ ... ...
... ...

b) Déterminer une équation $y = t_a(x)$ de la tangente $\mathcal{T}_a$.

⇨ ... ...
... ...

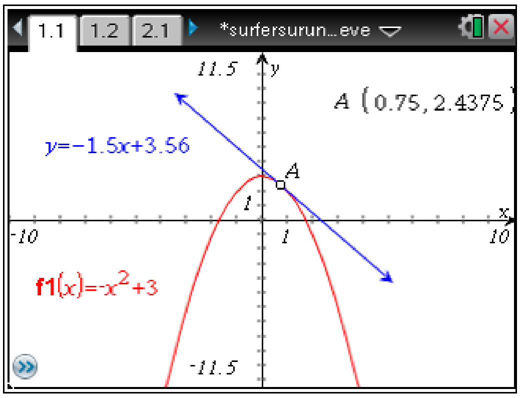
c) Démontrer la conjecture émise à la question **a)**.

⇨ ... ...
... ...

d) Passer à la page 5.2 dans l'Éditeur mathématique, renseigner $f(x)$ à la suite de la commande **Define f(x)=** et vérifier les réponses aux questions précédentes.

Aide technique

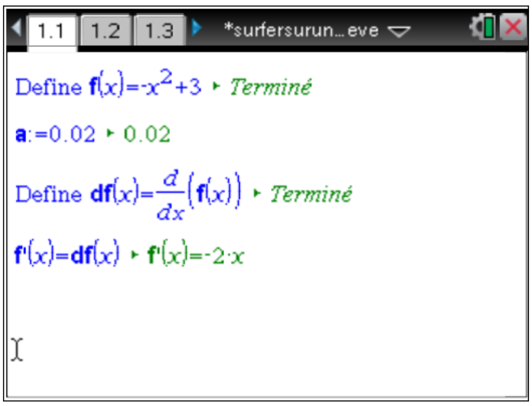
• **Pour faire afficher la tangente $\mathcal{T}_a$ à la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f en un point A** (on suppose f dérivable en a, abscisse de A),
menu 7 **: Points et droites**, 7**: Tangente**[1].
Sélectionner dans un ordre indifférent la courbe $\mathscr{C}$ et le point A (touche) ; la « double flèche » tracée peut être allongée en tirant sur ses extrémités.

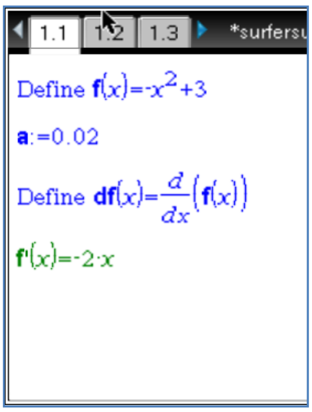


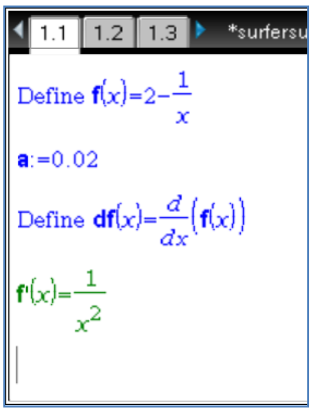
• **Pour faire afficher l'équation de la tangente $\mathcal{T}_a$ dans l'application Graphique**,
menu 1 **: Actions**, 7 **: Coord. et éq.**
Sélectionner la tangente (touche), puis l'emplacement de la fenêtre graphique où l'on souhaite déposer l'équation.

• **Pour insérer une boîte mathématique**,
menu 3 **: Insertion**, 1 **: Boîte saisie math**.
(raccourci : ctrl M) ; entrer l'instruction souhaitée (ici, **a** :=0.02), valider par enter.

Remarque : parmi les attributs d'une boîte mathématique (sur la boîte), on peut choisir d'afficher la saisie et le résultat ou masquer l'un des deux, comme cela apparait sur les deux écrans de droite ci-dessous.







[1] Sur ordinateur, ces commandes se trouvent dans **Outils du classeur** de la **Boîte d'outils Classeurs**.