Auteur : Jacques Salles

Stage calcul formel Conjecturer, prouver en multi-représentations TI-*n*spire CAS	# Surfer sur une courbe *Étude du signe d'une expression algébrique*

Sommaire

1. Objectifs

• Sur le plan pédagogique et dans le cadre de l'intégration des TIC aux séquences d'enseignement destinées aux élèves, ce document de formation propose une situation où diverses représentations (graphique dynamique, tableur) permettent d'émettre des conjectures en réponse à une question mathématique, de les affiner, de tester leur robustesse. Une réflexion sur le statut des réponses apportées par l'outil informatique (calculatrice ou logiciel) amène à percevoir la nécessité du calcul formel pour tenter de prouver telle ou telle conjecture. L'application **Éditeur mathématique** de **TI-*n*spire CAS**, avec son calcul formel dynamique, permet de s'intéresser à différentes variantes de la situation ; l'utilisateur, ainsi libéré de calculs répétitifs, peut mieux se concentrer sur le raisonnement. L'interactivité avec les autres applications (graphique en l'occurrence), favorise la construction de sens par les allers-retours liés à l'interprétation graphique d'une réponse du calcul formel.

• Sur le plan technique, l'éditeur mathématique est sollicité pour apprendre à créer et utiliser une « boîte mathématique », donnant ainsi accès au calcul formel dynamique.

2. Activité enseignant

La situation retenue est l'étude, à l'aide de la technologie TI-*n*spire CAS et de ses différentes applications, des positions relatives d'une courbe et de ses tangentes pour plusieurs exemples de fonctions. Diverses méthodes d'étude du signe d'une expression algébrique seront abordées ; les exemples proposés amènent à découvrir certaines limites de ces méthodes et à les dépasser.

> $\mathscr{C}$ désigne la représentation graphique d'une fonction f choisie parmi des fonctions usuelles telles que carré, inverse, racine carrée, cube, polynôme, homographique, rationnelle et $\mathcal{T}_a$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point M_a d'abscisse a, réel de l'ensemble de définition de f.

Question 1

Conjecturer les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathcal{T}_a$. Citer quelques exemples de méthodes et applications que l'on peut utiliser pour répondre à la question ; présenter les avantages et inconvénients de chacune d'elles.

Question 2

Chacune des méthodes et applications utilisées précédemment est-elle suffisante pour prouver la conjecture proposée ? Sinon que suggérez-vous ?

Question 3

Les méthodes et applications utilisées à la première question sont-elles toujours pertinentes pour répondre aux questions **1** et **2** avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 0{,}2\,x^3 + 0{,}01\,x^2$?

Question 4

$\mathscr{C}$ désigne maintenant la représentation graphique de la fonction exponentielle et $\mathcal{T}_a$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point M_a d'abscisse a, réel quelconque.

Reprendre les questions précédentes.

3. Éléments de réponse

Question 1

Parmi les méthodes et applications qui peuvent être utilisées, on peut citer :

– la réalisation d'un graphique dynamique (tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans une fenêtre adéquate, choisir un point mobile M_a sur $\mathscr{C}$, tracer la tangente $\mathcal{T}_a$ à $\mathscr{C}$ en M_a, visualiser et décrire les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathcal{T}_a$, déplacer le point M_a, visualiser et décrire à nouveau…) ;

– la réalisation d'un tableur dynamique (construire une table de valeurs des couples $(x\,;f(x))$, choisir un nombre réel a dans l'ensemble de définition de f et l'affecter à une cellule, déterminer l'équation $y = t_a(x)$ de la tangente $\mathcal{T}_a$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, calculer la différence $f(x) - t_a(x)$, observer le signe de cette différence et l'interpréter en terme de positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathcal{T}_a$) ;

– l'utilisation du calcul formel (définir $f(x)$, définir l'expression $t_a(x)$ relative à l'équation $y = t_a(x)$ de la tangente $\mathcal{T}_a$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, résoudre l'inéquation $f(x) - t_a(x) \geq 0$ et interpréter la réponse en terme de positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathcal{T}_a$).

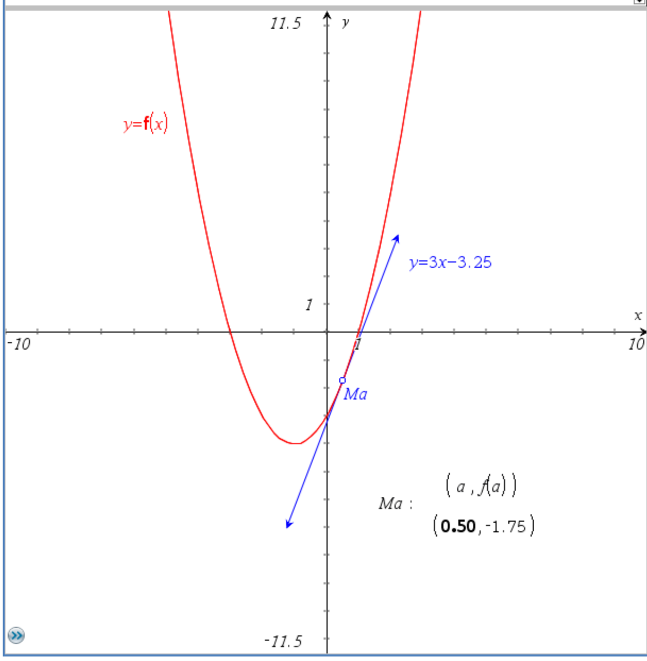
Les graphiques ci-dessous présentent deux exemples de réalisation combinée de ces trois méthodes.

Exemple de démarche d'investigation sur les positions relatives de la représentation graphique C de *f* et de sa tangente en un point Ma de C.

Une conjecture semble beaucoup plus sûre par une visualisation graphique qu'à partir du tableur ; le calcul formel, avec la commande solve, est trompé sur cet exemple par l'utilisation de la valeur a définie dans l'application graphique et qui a donc un statut de valeur approchée (on attend plutôt la réponse "true", qui apparait pour d'autres valeurs de a).

Define $f(x)=x^2+2\cdot x-3$	*Terminé*
a	0.501496
Define $ta(x)=\left(\frac{d}{dx}(f(x))\vert x=a\right)\cdot(x-a)+f(a)$	*Terminé*
solve$(f(x)-ta(x)\geq 0,x)$	$x\leq 0.501495$ or $x\geq 0.501496$

1/4



	A	B	C	D	E	F	G
1	a	x	f(x)	ta(x)	f(x) − ta(x)		
2	0.501496	-3	0	-12.2605	12.2605		
3		-2.5	-1.75	-10.759	9.00898		
4	pas	-2.	-3.	-9.25748	6.25748		
5	0.5	-1.5	-3.75	-7.75599	4.00599		
6		-1.	-4.	-6.25449	2.25449		
7		-0.5	-3.75	-4.75299	1.00299		
8		0.	-3.	-3.2515	0.251498		
9		0.5	-1.75	-1.75	0.000002		
10		1.	0.	-0.248506	0.248506		
11		1.5	2.25	1.25299	0.997011		
12		2.	5.	2.75449	2.24551		
13		2.5	8.25	4.25598	3.99402		
14		3.	12.	5.75748	6.24252		
15		3.5	16.25	7.25897	8.99103		
16		4.	21.	8.76047	12.2395		
17		4.5	26.25	10.262	15.988		
18		5.	32.	11.7635	20.2365		
19		5.5	38.25	13.265	24.985		

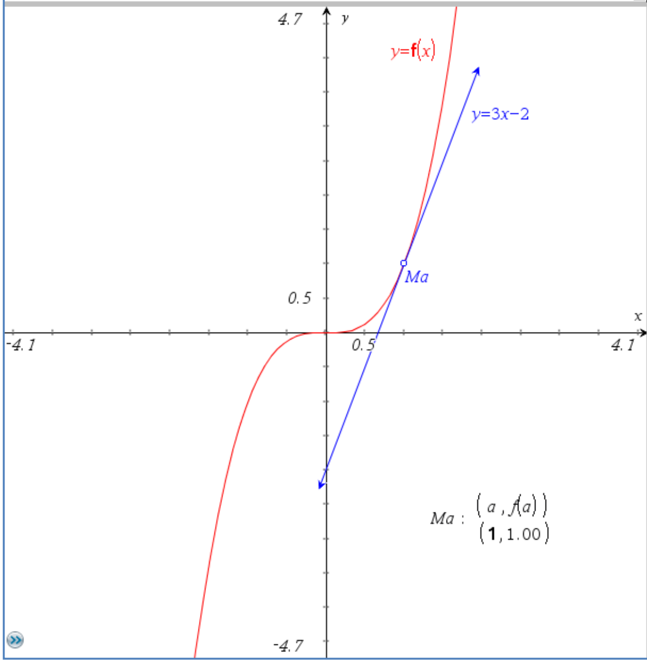
B3 =b2+a$5

N.B. Les écrans de ce document peuvent être visualisés dans le fichier **surfersurunecourbe-docformation.tns**.

Voici un autre choix de fonction f, avec $f(x)=x^3$. Ici, le calcul formel n'est pas dynamique, c'est-à-dire qu'il convient, dans la fenêtre Calculs, de reprendre chacune des commandes define, solve… afin d'obtenir une réponse adaptée. Cette réponse est exacte, car la valeur de a (a=1) l'est aussi. Dans cette situation, le changement de signe de $f(x)-ta(x)$ s'observe facilement sur le tableur, et cela peut déstabiliser utilement une conjecture "élève" émise un peu trop rapidement à partir du graphique.

Define $f(x)=x^3$	*Terminé*
a	1
Define $ta(x)=\left(\frac{d}{dx}(f(x))\vert x=a\right)\cdot(x-a)+f(a)$	*Terminé*
solve$(f(x)-ta(x)\geq 0,x)$	$x\geq -2$

1/4



	A	B	C	D	E	F	G
1	a	x	f(x)	ta(x)	f(x) − ta(x)		
2	1	-3	-27	-11	-16		
3		-2.5	-15.625	-9.5	-6.125		
4	pas	-2.	-8.	-8.	0.		
5	0.5	-1.5	-3.375	-6.5	3.125		
6		-1.	-1.	-5.	4.		
7		-0.5	-0.125	-3.5	3.375		
8		0.	0.	-2.	2.		
9		0.5	0.125	-0.5	0.625		
10		1.	1.	1.	0.		
11		1.5	3.375	2.5	0.875		
12		2.	8.	4.	4.		
13		2.5	15.625	5.5	10.125		
14		3.	27.	7.	20.		
15		3.5	42.875	8.5	34.375		
16		4.	64.	10.	54.		
17		4.5	91.125	11.5	79.625		
18		5.	125.	13.	112.		
19		5.5	166.375	14.5	151.875		
20		6.	216.	16.	200.		

C2 =f(b2)

Avantages et inconvénients de chacune de ces méthodes

– La visualisation dans l'environnement graphique, plus spontanée que dans le tableur, facilite l'émergence de conjectures. En outre cet environnement dispose d'une commande spécifique de tracé de tangente (outil **Tangente** du menu **Points et droites**) alors que l'affichage numérique des valeurs de $t_a(x)$ nécessite une compétence mathématique relative à la notion de dérivée.

– Le graphique permet généralement une vue plus globale de la position de deux courbes alors que le tableur limite la visualisation à un nombre réduit de lignes ; de plus le graphique encourage la formulation de conjectures par anticipation (sans garantie !) sur une fenêtre plus grande que celle réellement affichée.

– Le calcul formel, réduit ici à l'utilisation de la commande **solve**, peut selon les choix de la fonction étudiée et de l'abscisse a du point de tangence, ne pas fournir de réponse ou en fournir une dont la lecture n'est pas aisée. Cette commande agit comme une « boîte noire » : lorsque la réponse fournit un ensemble de solutions, aucune indication sur la preuve n'apparait.

Question 2

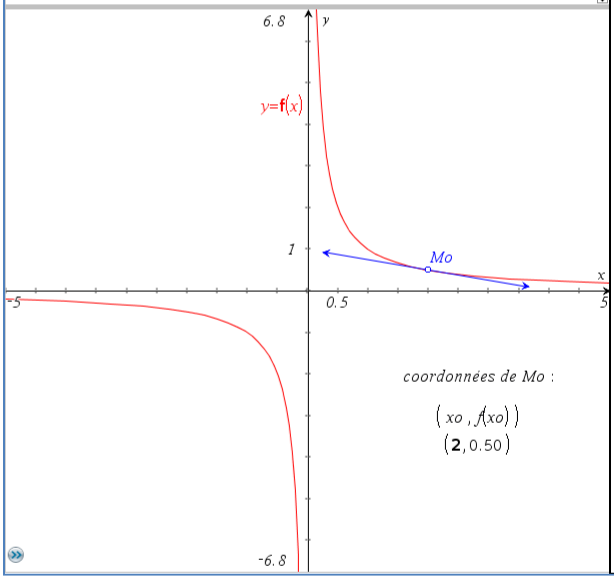
Avec le choix d'un graphique ou d'un tableur pour répondre à la question **1**, certains élèves pourraient penser que leur conjecture, fondée sur une lecture de l'affichage, est suffisante pour attester la réponse et ne nécessite donc pas de preuve. Pour les détromper, il suffira de leur soumettre une situation amenant un contre-exemple, telle que celle proposée à la question **3** (où f est une fonction polynomiale de degré 4 dont la concavité change dans l'intervalle [0 ; 0,1]). La commande **solve** de l'application **Calculs**, appliquée à des valeurs exactes, fournit une réponse fiable (sauf si un message de réserve apparait) mais ce seul usage ne fournit aucun élément de preuve.

Les élèves convaincus qu'aucune des démarches précédentes ne suffit à prouver leur conjecture penseront vraisemblablement à mettre en œuvre une méthode algébrique et donc à utiliser le CAS (système de calcul algébrique), seul environnement qui permet d'obtenir une preuve rigoureuse. Comparer deux expressions revient à étudier le signe de leur différence ; une méthode possible pour étudier le signe d'une expression consiste, quand ce signe n'est pas évident, à la factoriser ; cette méthode est particulièrement efficace pour les fonctions usuelles proposées dans le problème (carré, inverse, racine carrée, cube, polynôme, homographique, rationnelle), mais ne le sera évidemment pas pour la fonction exponentielle (cf. Question **4**).

Le calcul formel **dynamique et interactif** apparait dans cette page : les réponses, en rouge dans l'éditeur mathématique ouvert dans la partie droite de cette page, s'actualisent lorsque l'utilisateur intervient sur les données suivantes.

− le choix de xo, abscisse du point de tangence, peut être modifié en déplaçant Mo sur la courbe : les réponses aux questions a), b), c) s'actualisent.

− d'autres fonctions peuvent être choisies : il suffit d'entrer l'expression à la suite de la commande "Define f(x)=" dans l'éditeur mathématique ; toutes les réponses s'actualisent, ainsi bien sur que le graphique.



a) Choix de la fonction f

Define $f(x)=\frac{1}{x}$

b) Calcul de l'expression $t(x)$

Define $t(x)=\text{tangentLine}(f(x),x,x0)$

Equation de la tangente To à la représentation graphique C de f

au point Mo d'abscisse **x0** = 2 : $y = 1-\frac{x}{4}$

c) Position de la courbe (C) par rapport à la tangente Ta

$f(x)-t(x) = \frac{x}{4}+\frac{1}{x}-1$

$\text{factor}(f(x)-t(x)) = \frac{(x-2)^2}{4\cdot x}$

Il ne reste plus qu'à observer le signe de cette différence, si cela parait possible, et interpréter graphiquement le résultat.

d) Cas général : l'abscisse du point Ma est une variable notée a

Define $ta(x)=\left(\frac{d}{dx}(f(x))|x=a\right)\cdot(x-a)+f(a)$

$ta(x) = \frac{-(x-2\cdot a)}{a^2}$

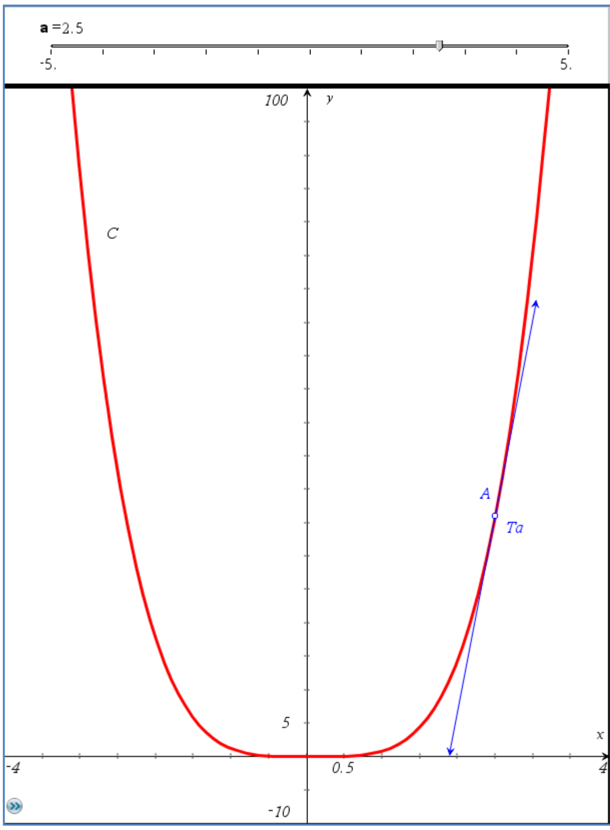
$\text{factor}(f(x)-ta(x)) \blacktriangleright \frac{(x-a)^2}{a^2\cdot x}$

Conclure.

Note *: la réalisation technique des « boîtes mathématiques » utilisées ci-dessus dans l'éditeur est décrite dans la partie* ***Aide technique****, à la fin du document de formation-élève.*

Question 3

La visualisation dans l'environnement graphique, dépendant de la fenêtre choisie, peut cacher quelques subtiles caractéristiques de la fonction ; ainsi dans une « fenêtre standard », la courbe $\mathscr{C}$ semble *toujours* située au-dessus de ses tangentes.



On incitera les élèves, s'ils ne le font pas par eux−mêmes, à interpréter la réponse sur la factorisation de f(x)−ta(x) et à contrôler la cohérence avec la conjecture graphique.

Question 3

a) Choix de la fonction f

Define $f(x)=x^4-0.2\cdot x^3+0.01\cdot x^2$

b) Choix de a sur le curseur en haut de la page ci−contre **a** = $\frac{5}{2}$

c) Calcul de l'expression $ta(x)$

Define $ta(x)=\left(\frac{d}{dx}(f(x))|x=\mathbf{a}\right)\cdot(x-\mathbf{a})+f(\mathbf{a})$

Equation de la tangente T**a** à la représentation graphique C de f

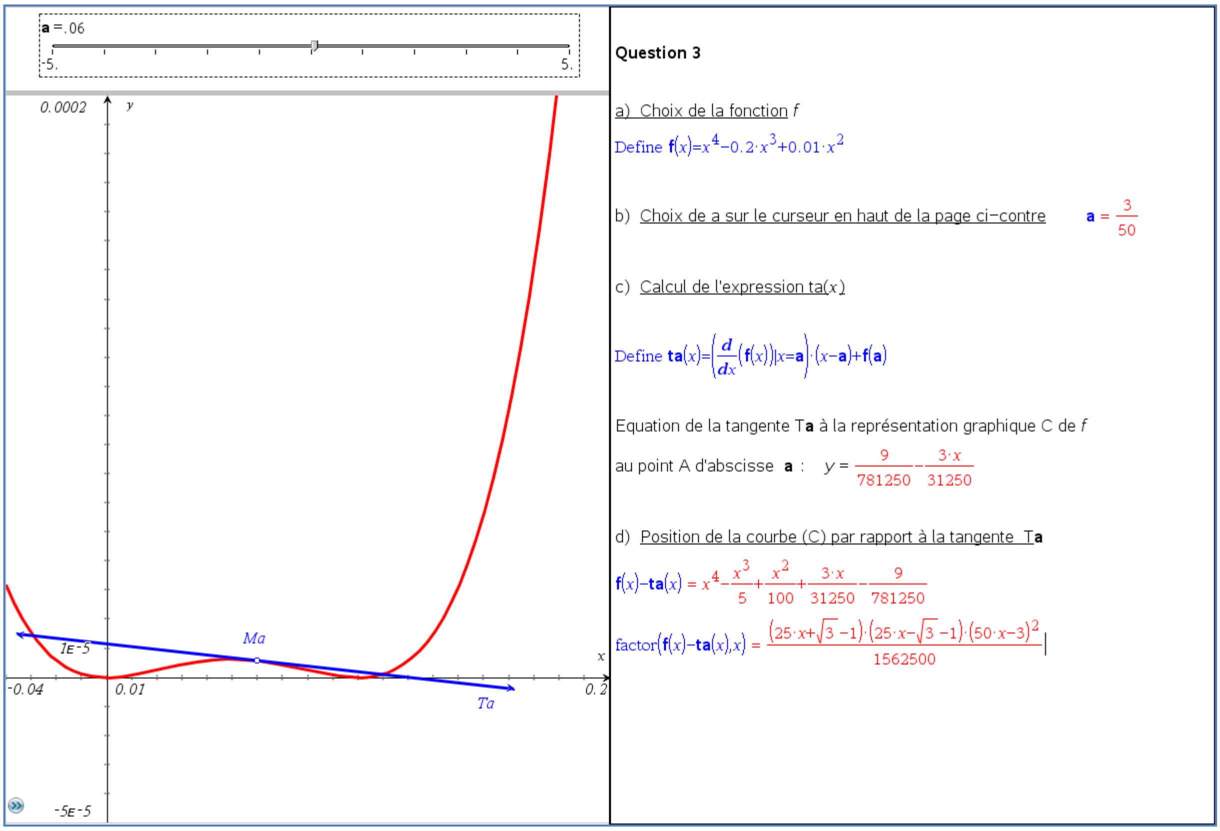
au point A d'abscisse **a** : $y = \frac{294\cdot x}{5}-111$

d) Position de la courbe (C) par rapport à la tangente T**a**

$f(x)-ta(x) = x^4-\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{100}-\frac{294\cdot x}{5}+111$

$\text{factor}(f(x)-ta(x),x) = \frac{(2\cdot x-5)^2\cdot(25\cdot x^2+120\cdot x+444)}{100}$

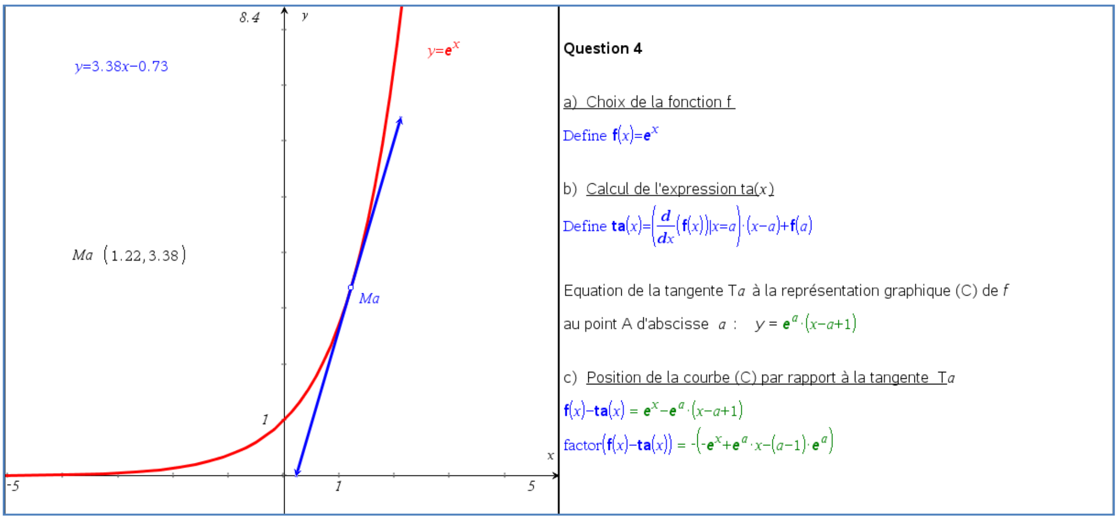
De façon analogue, en utilisant des « valeurs standard » pour l'abscisse a du point de tangence ainsi que pour le pas, le tableur fournit une table de valeurs pour $f(x) - t_a(x)$ où tous les nombres ont le même signe. Pour observer un changement de signe, il est nécessaire de choisir des valeurs spécifiques pour a (entre 0 et 0,1) et pour le pas (inférieur à 0,1).
Pour aussi anecdotiques qu'ils soient, de tels exemples apprennent aux élèves la prudence dans l'interprétation des graphiques et tableaux de valeurs.



***Remarque* :** dans cet exemple, la fonction f est définie sur ℝ par $f(x) = x^4 - 0,2\,x^3 + 0,01\,x^2$; cette expression, développée, a été préférée à celle factorisée, $x^2\,(x - 0,1)^2$, pourtant très explicite, de façon à ne pas influencer l'utilisateur par un choix particulier de fenêtre de travail.

Question 4

Avec l'exemple de la fonction exponentielle, la visualisation graphique amène une conjecture évidente sur les positions relatives de la courbe et de ses tangentes, quel que soit le point de tangence choisi. Mais la preuve par l'algèbre ne fonctionne plus : la méthode de factorisation pour étudier le signe d'une expression a atteint ses limites. Une autre démarche doit être trouvée pour prouver la conjecture, celle par exemple qui consiste à étudier le sens de variation d'une fonction pour tenter d'en déduire son signe, méthode bien adaptée dans le cas présent.

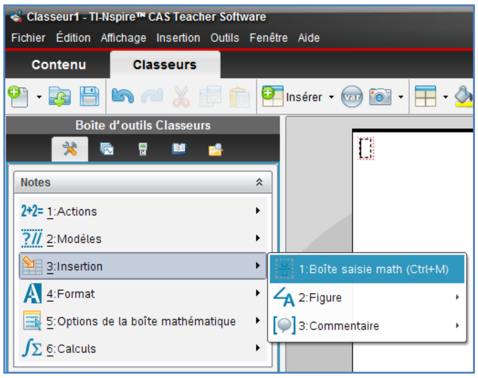


4. Apprentissage technique

a. Création et utilisation d'une « boîte mathématique interactive », outil de base du calcul formel dynamique

N.B. L'outil « boîte mathématique » est disponible dans l'application **Éditeur mathématique**.

Ouvrir une page **Éditeur mathématique.**
Insérer une boîte mathématique.



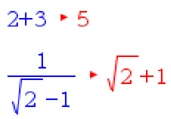
Sur ordinateur :
Outils du classeur, **3 : Insertion, 1 : Boîte saisie math**

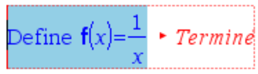
Sur calculatrice : menu 3 1

Raccourci dans les deux cas : **Ctrl + M**

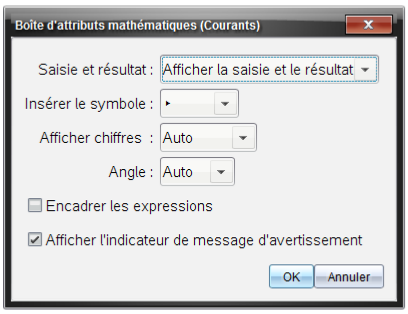
Boîte mathématique

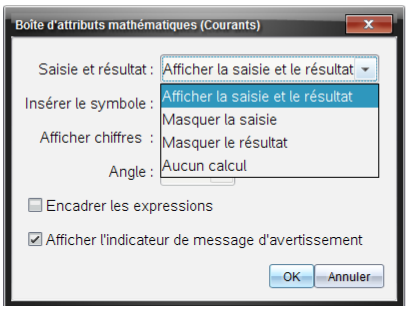
• Une boîte mathématique comporte deux zones : saisie et résultat ; la saisie peut recevoir une expression, une fonction prédéfinie du catalogue ou définie par l'utilisateur, une variable.

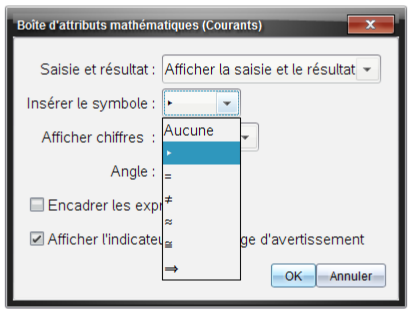




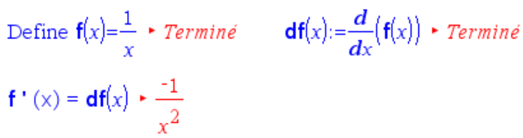
• Une boîte mathématique comporte des attributs : il est possible de masquer la saisie ou le résultat, de choisir le symbole séparateur de la saisie et du résultat, de fixer l'affichage de l'écriture décimale d'un nombre réel, fixer l'unité de mesure d'angles.



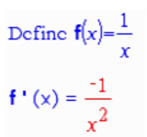


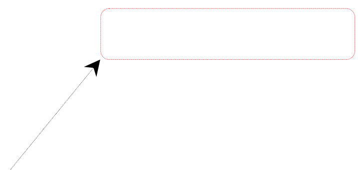


Affichage de la saisie ou du résultat : l'écran ci-contre reproduit trois boîtes mathématiques ; deux définissent des fonctions, **f** et **df**, la troisième affiche **df**(x) ; saisie et résultat sont affichés pour les trois.
Quant à l'affichage **f '** (x) = , il s'agit simplement d'un texte (et non d'une boîte mathématique), affiché en bleu.

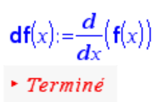


Ici, le résultat est masqué pour la première boîte mathématique (seule apparait la définition de **f**), la saisie est masquée pour la troisième boîte (seul apparait le résultat $\frac{-1}{x^2}$) ainsi que pour la deuxième (définition de **df**) et seul devrait alors apparaître le résultat ▸ *Terminé* ; on constatera qu'il n'est pas prévu, de façon assez évidente, de masquer à la fois saisie et résultat ; toutefois, si pour une raison particulière l'on souhaite masquer également le résultat, il suffit de lui fixer l'attribut couleur blanche.





La deuxième boîte n'apparaît pas :
l'entrée est masquée
et le résultat affiché en blanc



• Le principal atout des boîtes mathématiques est leur interactivité.
– interactivité dans l'application ouverte (éditeur mathématique) ;
– interactivité entre applications diverses d'une même activité (cf. exemples d'utilisation ci-dessous).

Define $f(x)=\sqrt{x}$

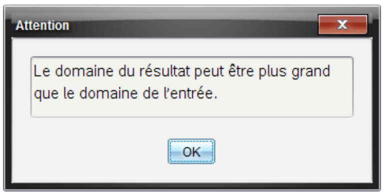
$f'(x) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

Une modification de la saisie entraine une mise à jour de toutes les boîtes liées à celle-ci et situées dans la même page ou dans une page quelconque de la même activité.

N.B. Pour obtenir la mise à jour des résultats associés, la modification de la saisie d'une boîte doit impérativement être validée par pression de la touche enter (ordinateur ou calculatrice), le curseur étant positionné à l'intérieur de la boîte modifiée.

Messages d'avertissement

Si leur affichage a été demandé (option cochée par défaut dans la boîte d'attributs mathématiques), l'indicateur de tels messages peut apparaître dans le résultat d'une boîte ; dans l'exemple ci-contre, l'utilisateur est prévenu de la modification possible de l'ensemble de validité d'une expression lors d'une simplification automatique réalisée par le calcul formel.



a) Choix de la fonction f

Define $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$ ▸ *Terminé*

b) Calcul de l'expression $ta(x)$

Define $ta(x)=\left(\dfrac{d}{dx}(f(x))|x=a\right)\cdot(x-a)+f(a)$

Equation de la tangente Ta à la représentation graphique (C) de f au point A d'abscisse a : $y=\dfrac{-(2\cdot a\cdot x-3\cdot(a^2-3))}{(a^2-9)^2}$

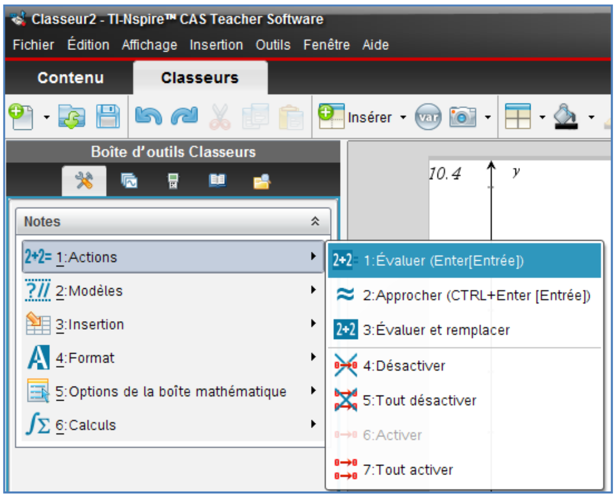
c) Position de la courbe (C) par rapport à la tangente Ta

$f(x)-ta(x) = \dfrac{1.}{x^2-9.}+\dfrac{2.\cdot(a\cdot x-1.5\cdot(a^2-3.))}{(a^2-9.)^2}$ ⚠

$\mathrm{factor}(f(x)-ta(x)) = \dfrac{(x-a)^2\cdot(2\cdot a\cdot x+a^2+9)}{(a-3)^2\cdot(a+3)^2\cdot(x-3)\cdot(x+3)}$ ⚠

Autres options

Pour une étude complète, il conviendrait de présenter de façon détaillée l'utilisation d'autres options, dont la présence sera seulement citée ici.
– Un texte sélectionné dans l'éditeur mathématique peut être converti en boîte mathématique ; s'il contient des expressions, des variables ou des fonctions, celles-ci seront dès lors évaluées.
– Plusieurs éléments de texte et boîtes mathématiques peuvent être regroupées et converties en une seule boîte.
– Une expression (ou partie d'expression) à l'intérieur d'une boîte mathématique peut être évaluée (en valeur exacte), ou en mode approché ; la sélection peut être remplacée par sa forme évaluée.
– Une boîte mathématique sélectionnée (ou un groupe de boîtes) peut être désactivée (ou activée) ; il en est de même de l'ensemble des boîtes de l'application **Éditeur mathématique** active.



b. Exemples d'utilisation d'une boîte mathématique interactive

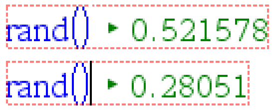
• **Position d'une courbe par rapport à ses tangentes** (séquence « Surfer sur une courbe »)

On notera en particulier dans les éléments de réponse à la question **3** du document de formation enseignant (cf. les deux écrans au bas de la page 4 et en haut de la page 5) ou directement dans l'activité 6, page du fichier d'accompagnement surfersurunecourbe-docformation.tns, l'interactivité du calcul formel obtenue soit par modification de l'expression de la fonction *f* dans une boîte mathématique de l'**Éditeur mathématique**, soit par modification de la valeur affectée à la variable *a*, abscisse du point de tangence, à l'aide d'un curseur situé dans une page **Géométrie** de la même activité.

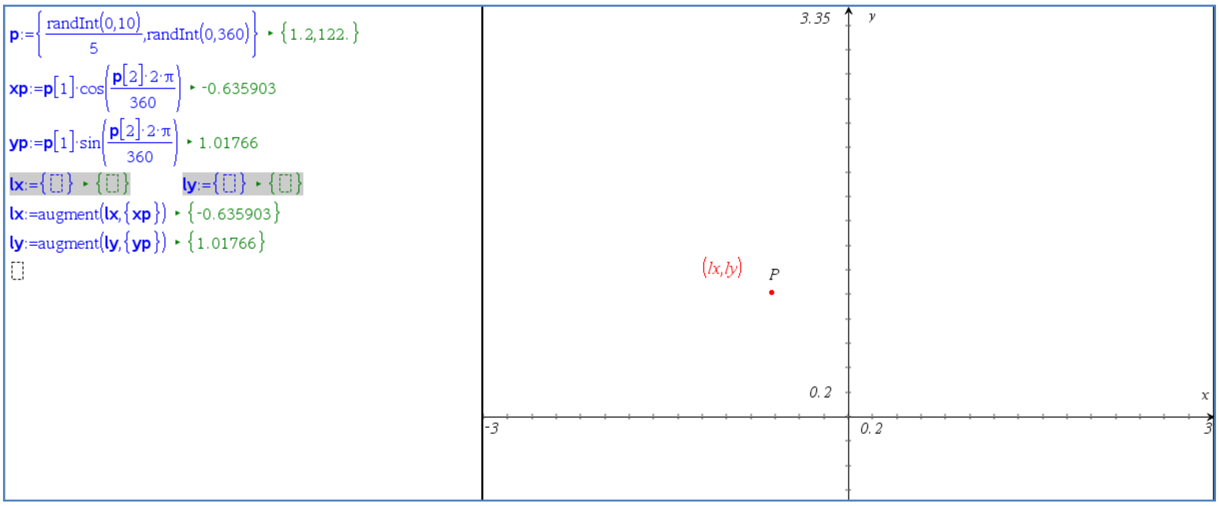
A l'inverse, l'interactivité peut aller de l'**Éditeur mathématique** vers d'autres applications situées dans une même activité.

• **Un exemple de mouvement brownien à l'intérieur d'un disque**

Observation préliminaire utilisation d'une instruction génératrice d'un nombre aléatoire dans une boîte mathématique :
rand() permet d'obtenir un décimal de l'intervalle [0 ; 1] suivant la loi uniforme ; une nouvelle validation de la boîte mathématique (le curseur situé à l'intérieur de la boîte, taper enter) fournit un nouveau décimal aléatoire.

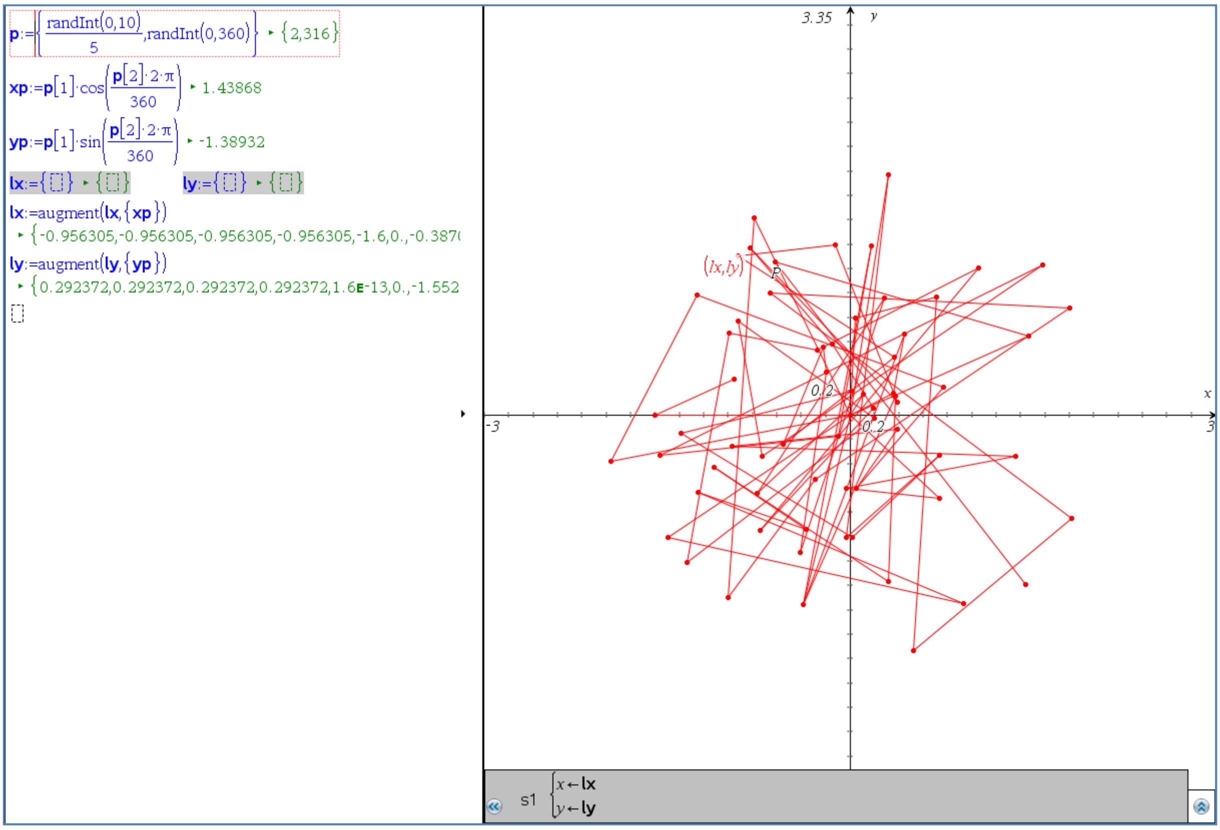


Cet exemple montre l'utilisation d'une boîte mathématique pour créer en direct et de façon dynamique un nuage de points, affiché en mode relié dans l'application **Graphiques**. Chaque point P est obtenu par calcul aléatoire de ses coordonnées polaires (r ; θ) dans un repère orthonormal avec r décimal compris entre 0 et 2 de la forme 0,2 k (k entier) et θ entier aléatoire compris entre 0 et 360.
La variable **p** désigne la liste de ces deux coordonnées polaires, **xp** et **yp** sont les coordonnées cartésiennes du point P.
Deux listes **lx** et **ly**, initialisées par des listes vides, se « garnissent » au fur et à mesure des coordonnées cartésiennes des nouveaux points créés.
L'écran ci-dessous montre, à gauche, l'**Éditeur mathématique** avec l'ensemble des boîtes mathématiques créées après les avoir toutes validées ***une*** fois, et, à droite, l'application **Graphiques** dans laquelle s'affiche le nuage de points (*lx* ; *ly*), réduit donc encore à un seul point. L'ensemble des résultats a été mis en mode approché afin d'en faciliter la lecture.



Pour obtenir de nouveaux points, il suffit de placer le curseur dans la première boîte mathématique (celle qui définit la variable **p**, et presser la touche enter.
L'écran suivant montre le résultat après la création de plusieurs nouveaux points.

A noter : les boîtes qui initialisent **lx** et **ly** apparaissent en grisé : elles ont été désactivées juste après les avoir créées afin de conserver la trace de cette initialisation ; à chaque activation de la boîte définissant **p**, les variables **lx** et **ly** sont actualisées, mais le résultat reste inchangé dans les boîtes désactivées.


p:={randInt(0,10)/5,randInt(0,360)} ▸ {2,316}
xp:=p[1]·cos(p[2]·2·π/360) ▸ 1.43868
yp:=p[1]·sin(p[2]·2·π/360) ▸ -1.38932
lx:={} ▸ {}
ly:={} ▸ {}
lx:=augment(lx,{xp})
▸ {-0.956305,-0.956305,-0.956305,-0.956305,-1.6,0.,-0.387
ly:=augment(ly,{yp})
▸ {0.292372,0.292372,0.292372,0.292372,1.6E-13,0.,-1.552
3.35
y
x
-3
3
0.2
(lx,ly)
P
s1
x←lx
y←ly