EP 091 - 2009 : Propriétés d'une courbe

Auteur du corrigé : François TEXIER **TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version* 1.7

Fichier associé : EP091_2009_ProprieteCourbe_CAS.tns

1. Le sujet

Sujet 091 de l'épreuve pratique 2009 – Propriétés de la courbe représentative d'une fonction

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 4}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$
Soit a un réel quelconque, M et N les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a et $-a$.

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de votre choix.

2. Faire varier a et émettre des conjectures concernant respectivement :
- la droite (MN) ;
- le lieu du point I intersection des tangentes à C en M et N.

3. On se propose d'étudier les conjectures émises à la question précédente.
a) Déterminer en fonction de a les coordonnées des points M et N.
b) Justifier les conjectures émises à la question **2.**

Production demandée

- Visualisation à l'écran du lieu du point I.
- Réponses argumentées aux questions **3. a** et **3. b**.

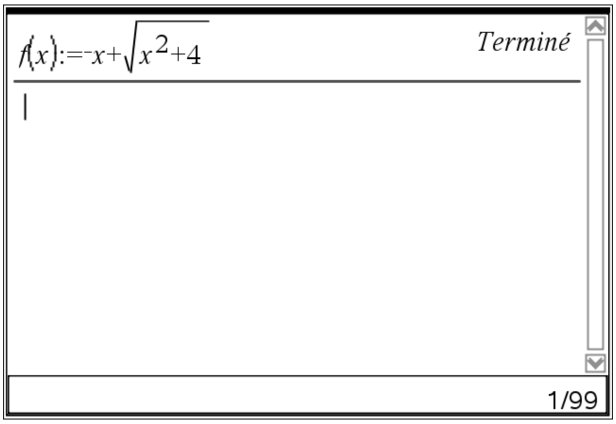
Compétences évaluées

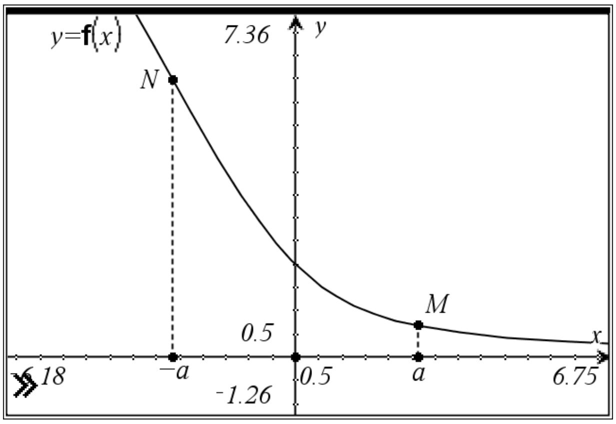
- Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Observer la position d'une droite variable.
- Déterminer une équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction dérivable.

2. Corrigé

1) Ouvrir une page **Calculs**.

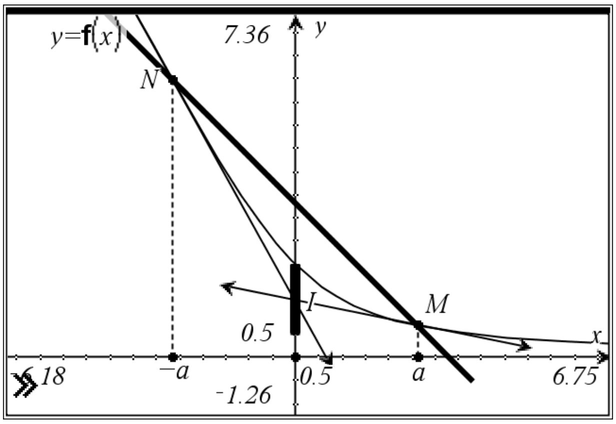
Saisir la fonction f.
On aura besoin de cette page et de cette fonction plus loin.





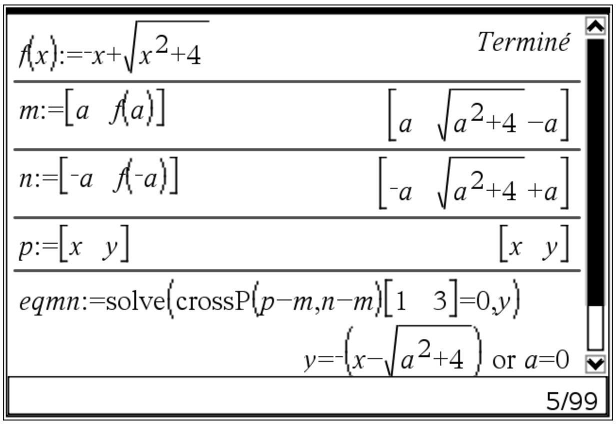
Insérer une page **Graphiques & géométrie**.

Dans la ligne de saisie taper « $f(x)$ » et valider.
Placer un point « a » sur l'axe des abscisses, construire son symétrique par rapport à O et le nommer « $-a$ », puis construire les perpendiculaires à l'axe des abscisses passant par les deux points précédents. Placer les points d'intersections M et N de ces perpendiculaires avec la courbe $\mathcal{C}$, cacher les perpendiculaires et tracer les segments [aM] et [–aN] pour obtenir l'écran ci-contre.

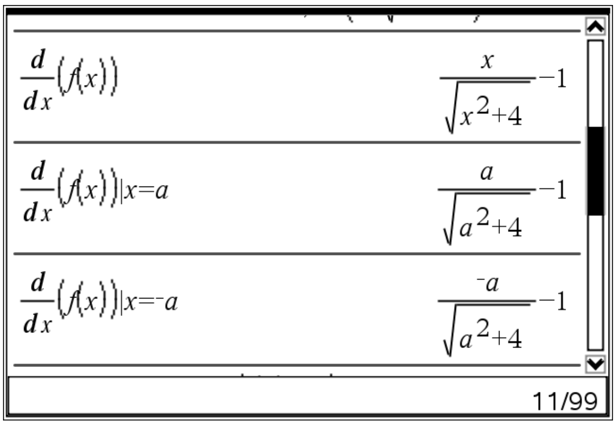


2) Tracer la droite (MN), puis les tangentes à $\mathcal{C}$ en M et en N, puis le point I d'intersection de ces deux tangentes.
Demander le lieu du point I lorsque a décrit l'axe des abscisses. Faire apparaître la droite (MN) et le lieu en plus épais.

En déplaçant le point d'abscisse a sur l'axe des abscisses, il semble que la droite (MN) ait un coefficient directeur constant et que le point I décrive le segment]0 ; 2] de l'axe des ordonnées.

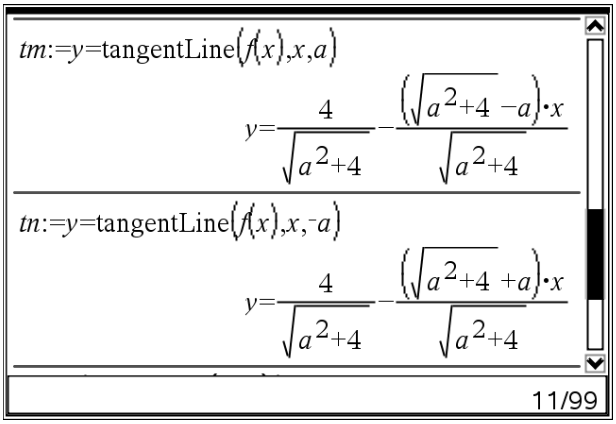


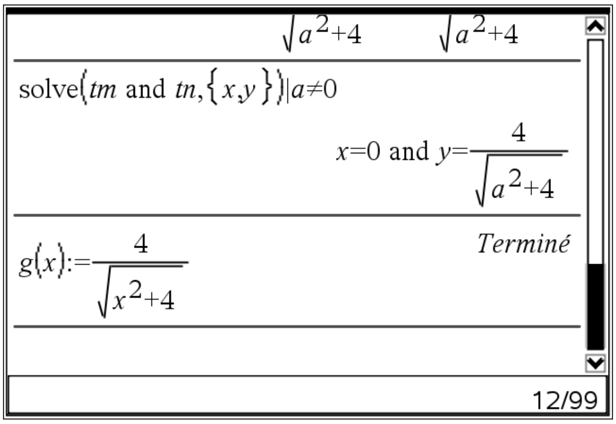
3) Revenir à la page **Calculs**.
a) Définir les points M et N comme variables par leurs coordonnées respectives (a ; $f(a)$) et ($-a$; $f(-a)$).
b) Définir un point P quelconque du plan de coordonnées (x ; y) et demander l'équation de la droite (MP) comme le montre l'écran ci-contre.
D'après ce même écran, si $a = 0$, on est dans une situation particulière ; en effet dans ce cas M et N sont confondus et la droite (MN) n'existe plus ; mais si $a \neq 0$, la droite (MN) a un coefficient directeur constant égal à –1, ce qui justifie que, quel que soit a, les droites (MN) ont toujours la même direction, c'est-à-dire sont parallèles entre elles.



Calculer la fonction dérivée de f, puis les coefficients directeurs des tangentes à $\mathcal{C}$ en M et N.
D'après l'écran ci-contre, ces coefficients directeurs sont différents si $a \neq 0$; les tangentes sont alors sécantes.

Déterminons ensuite les équations de ces tangentes, puis les coordonnées de leur point I d'intersection (voir écrans ci-dessous).

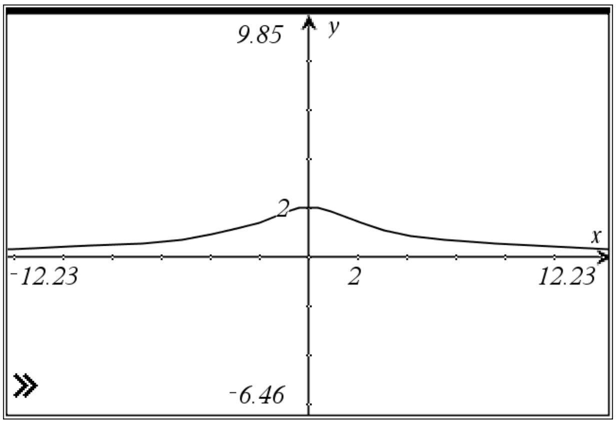




On constate que le point I est sur l'axe des ordonnées.

Soit g la fonction définie sur ℝ par $g(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}}$ qui donne la valeur de l'ordonnée de I.

Traçons la courbe représentative de cette fonction.
Pour cela insérer une page **Graphiques & géométrie** et saisir $g(x)$ dans f_2.



Quand x décrit ℝ, $g(x)$ décrit l'intervalle $]0\ ;\ 2]$.
Le lieu du point I est donc l'intervalle]OJ] où le point J a pour coordonnées $(0\ ;\ 2)$.