

D1n – ARBELOS

Auteurs : France et Michel VILLIAUMEY

TI-Nspire™

Thème : étude des variations du périmètre et de l'aire d'une figure géométrique dont un point est mobile.

Fichier associé : D1n_Arbelos.tns

1. Enoncé

Partie 1

A l'aide d'un logiciel de géométrie, réaliser la construction suivante :

- $[AB]$ est un segment horizontal et M est un point variable sur $[AB]$.
- Tracer les deux demi-cercles de diamètres respectifs $[AM]$ et $[MB]$.
- Soit P un point du demi-cercle de diamètre $[MB]$, tracer la demi-droite $[BP]$. Tracer la parallèle à la droite (BP) passant par le point M , elle coupe le demi-cercle de diamètre $[AM]$ en un point Q . Les droites (AQ) et (BP) se coupent en un point K .

Mesurer à l'aide du logiciel, l'angle \widehat{AKB} .

Faire varier le point P (sur le demi-cercle de diamètre $[MB]$) et le point M (sur le segment $[AB]$).

Que remarque-t-on concernant la mesure de l'angle \widehat{AKB} ? A quelle figure géométrique doit appartenir le point K ? Tracer cette figure.

Donner une démonstration précise de votre réponse.

Partie 2

On utilise maintenant un tableur : on précisera, lorsque l'on remplira une colonne, la méthode utilisée (formule, copier-coller,...).

On prend la longueur $AB = 10$.

Remplir la 1^{ère} colonne du tableur avec les nombres de 0 à 5 avec un pas de 0,5, correspondant à différentes valeurs du rayon r_1 du demi-cercle de diamètre $[AM]$.

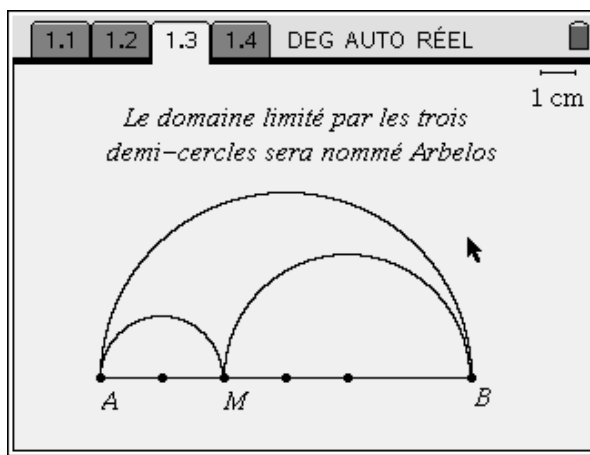
Remplir de manière automatique la 2^{ème} colonne donnant à chaque fois le rayon r_2 du demi-cercle de diamètre $[MB]$.

Remplir la 3^{ème} colonne donnant les différentes valeurs, arrondies au millièème, du périmètre p_1 du demi-cercle de diamètre $[AM]$ et la 4^{ème} colonne correspondant au périmètre p_2 , arrondi au millièème, du demi-cercle de diamètre $[MB]$ et enfin une 5^{ème} colonne donnant la somme en ligne des valeurs des colonnes 3 et 4.

Que constate-t-on ? Quelle est la signification géométrique de ce résultat ?

Démontrer ce résultat.

Partie 3



Montrer sans nouveau calcul que le périmètre de l'Arbelos est constant.

Etude de l'aire de l'Arbelos

Ouvrir une nouvelle feuille de calcul sur le tableur.

Recopier les colonnes r1 et r2 de la feuille de calcul précédente.

Etablir une formule permettant de calculer l'aire de l'Arbelos.

Utiliser cette formule pour remplir la 3^{ème} colonne, que vous nommerez aa, avec des valeurs approchées au millièème.

Quelle est la valeur maximale de l'aire de l'Arbelos que l'on peut lire dans cette colonne ? Est-on sûr que cette valeur est réellement la plus grande possible ? Pourquoi ?

Représenter dans un repère orthogonal les points ayant pour coordonnées r1 en abscisse et aa en ordonnée.

2. Commentaires

Les objectifs de ce devoir sont de conjecturer un résultat, construire une figure géométrique avec un logiciel, établir une formule littérale, utiliser le tableur pour rechercher un maximum, construire un nuage de points et l'utiliser pour valider le résultat trouvé.

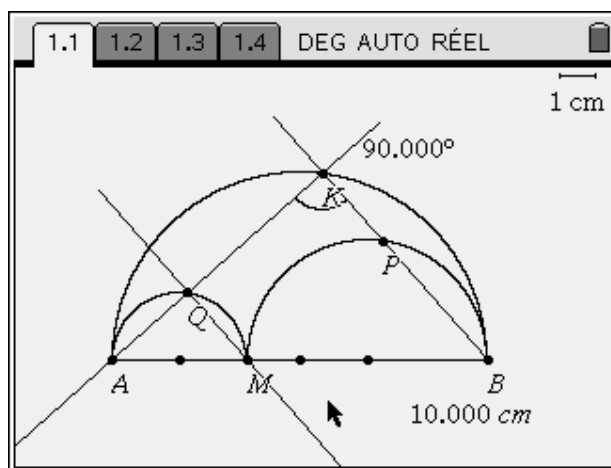
3. Réponses

Partie 1

Réaliser la construction dans une page **Graphiques & géométrie**.

L'angle \widehat{AKB} reste un angle droit quelle que soit la position considérée car le triangle AQM est rectangle en Q (inscrit dans un demi-cercle) et la droite (BK) est parallèle à la droite (MQ).

Le triangle ABK est donc inscrit dans un cercle de diamètre [AB].



Partie 2

Ouvrir une page **Tableur & listes**.

Nommer la première colonne r1 ; on saisit le rayon du cercle de diamètre [AM].

Cette suite de nombres de 0 à 5 avec un pas de 0,5 peut se faire à la main cellule par cellule ou en utilisant la fonction **Générer une suite** : saisir la suite $u(n) = u(n-1) + 0.5$ avec $u_0 = 0$, un nombre maximal de termes égal à 11 et une valeur maximale de 10.

Nommer la deuxième colonne r2, on saisit le rayon du cercle de diamètre [MB].

Nommer les colonnes C et D respectivement p1 et p2, et saisir la formule du demi-périmètre de chaque cercle.

1.1	1.2	1.3	1.4	DEG AUTO REEL					
A	r1	B	r2	C	p1	D	p2	E	p
◆ =seqn				=π*r1		=π*r2			
1	0	5		0.000	15.708	15.708			
2	.500	4.500		1.571	14.137	15.708			
3	1.000	4.000		3.142	12.566	15.708			
4	1.500	3.500		4.712	10.996	15.708			
5	2.000	3.000		6.283	9.425	15.708			
A r1:=seqn(u(n-1)+.5,{0},11,10)									

On constate que la somme des deux demi-périmètres cherchés est constante. Elle est égale au demi-périmètre du cercle de diamètre [AB].

Partie 3 :

Le périmètre de l'Arbelos est constant car il est égal à deux fois le demi-périmètre du cercle de diamètre [AB].

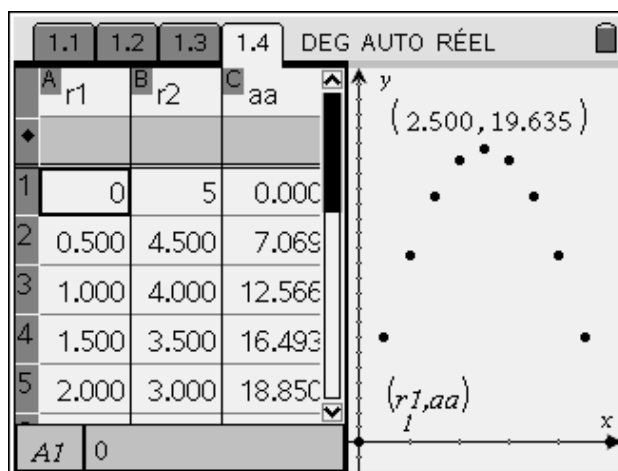
Ouvrir une nouvelle page **Tableur & listes**.

Recopier les colonnes r1 et r2 de la page **Tableur & listes** précédente et saisir dans la colonne C la formule de l'aire d'Arbelos.

Formule de l'aire de l'Arbelos :

$$\text{Aire} = \frac{\pi}{2} \times \left(\left(\frac{AB}{2} \right)^2 - r_1^2 - r_2^2 \right).$$

L'aire maximale lue dans le tableur est d'environ $19,6 \text{ cm}^2$. Les deux demi-cercles intérieurs ayant alors le même rayon égal à $2,5 \text{ cm} \left(\frac{AB}{4} \right)$.



Insérer une application **Graphique & géométrie** : dans le menu **Format de page**, puis **Sélectionner un format**, choisir le fractionnement en deux parties.

Dans le menu **Type de graphique**, sélectionner **Nuage de points**. On prend pour coordonnées r1 en abscisses et aa en ordonnées.